*doi:10.18286/1816-4501-2026-3-249-256*
*УДК 631.312:621.879*

## Оптимизация конструкционных параметров двухъярусного рыхлителя почвы

**К. А. Хафизов**✉**,** доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Тракторы, автомобили и энергетические установки»
**М. А. Мифтахов,** аспирант кафедры «Тракторы, автомобили и энергетические установки»
**Р. Н. Хафизов,** кандидат технических наук, доцент кафедры «Тракторы, автомобили и энергетические установки»
**А. А. Нурмиев,** старший преподаватель кафедры «Тракторы, автомобили и энергетические установки»
ФГБОУ Казанский государственный аграрный университет
420015, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Карла Маркса, д. 65
✉fts-kgau@mail.ru

**Резюме.** В статье представлено комплексное теоретическое исследование и выполнено математическое моделирование процесса взаимодействия двухъярусного рабочего органа рыхлителя с почвенным массивом, подвергшимся значительному техногенному уплотнению движителями энергетических средств. Актуальность исследования обусловлена необходимостью минимизации энергетических затрат при восстановлении структуры почв, деградировавших под воздействием тяжелой сельскохозяйственной техники классов тяги 5 – 8. Цель исследования- разработка научно обоснованной математической модели двухъярусного тандемного рыхлителя следов трактора для оптимизации его геометрических параметров, обеспечивающих минимальное тяговое сопротивление при максимальном разрыхлении почвы. В основе разработанной математической модели лежит синтез классических теорий предельного равновесия сыпучих сред (теории Хеттиаратчи - Риса) и механики разрушения почв узкими рабочими органами (модель Годвина - Спура), модифицированных с учетом эффекта взаимодействия полей напряжений между верхним и нижним ярусами рыхлителя. Детальный анализ физики процесса скалывания уплотненной почвы позволил определить границы перехода от деформации сдвига к боковому уплотнению («критическая глубина») и обосновать эффективность двухъярусной схемы как метода управления данным переходом. Предложенные уравнения позволяют с высокой степенью достоверности определить тяговое сопротивление орудия в зависимости от его геометрических параметров (угол резания, ширина долота, вынос яруса, глубина обработки) и реологических свойств почвы (угол внутреннего трения, сцепление, плотность). Результаты численного моделирования демонстрируют, что оптимизация конструкционных параметров двухъярусного рыхлителя почвы дает возможность снизить его тяговое сопротивление на 15…20 % при одновременном улучшении качества крошения почвы за счет оптимизации взаимного расположения деформаторов.

**Ключевые слова:** трактор, уплотнение почвы, рыхлитель следов трактора, двухъярусная обработка, тяговое сопротивление, оптимизация параметров, механика грунтов, критическая глубина, MATLAB.
**Для цитирования:** Оптимизация конструкционных параметров двухъярусного рыхлителя почвы / К.А. Хафизов, М.А. Мифтахов, Р.Н. Хафизов и др. // Вестник Ульяновской государственной сельскохозяйственной академии. 2026. № 3 (75). С. 249-256. doi:10.18286/1816-4501-2026-3-249-256

## Improvement of the design parameters of a two-tier soil ripper

**K.A. Khafizov**✉**, M.A. Miftakhov, R.N. Khafizov, A.A. Nurmiev**
FSBEI Kazan State Agrarian University
420015, Republic of Tatarstan 65, Kazan, Karl Marx Street
✉fts-kgau@mail.ru

**Abstract**: This article presents a comprehensive theoretical study and mathematical modelling of the interaction between a two-tier soil ripper and soil masses subjected to significant technogenic compaction by power plant propellers. The relevance of this study stems from the need to minimize energy costs in restoring the structure of soils degraded by heavy agricultural machinery of 5–8 classes. The objective of the study is to develop a scientifically based mathematical model of a two-tier tandem tractor track ripper to improve its geometric parameters, ensuring minimal traction resistance with maximum soil loosening. The developed mathematical model is based on a synthesis of classical theories of the limit equilibrium of bulk media (the Hettiaratchi-Rees theory) and the mechanics of soil destruction by narrow working elements (the Godwin-Spoor model), modified to account for the interaction of stress fields between the upper and lower tiers of the ripper. A detailed analysis of the physics of compacted soil shearing enabled to determine the boundaries of the transition from shear deformation to lateral compaction ("critical depth") and substantiate the effectiveness of the two-tier design as a method for managing this transition. The proposed equations allow accurately determine the draught resistance of the tool depending on its geometric parameters (cutting angle, chisel width, tier offset, tillage depth) and soil rheological properties (internal friction angle, cohesion, density). The results of numerical modelling demonstrate that improvement of the design parameters of a two-tier soil ripper enables a reduction in draught resistance by 15–20%, simultaneously improving the quality of soil crumbling by improving the relative position of the deformers.

**Keywords:** tractor, soil compaction, tractor track ripper, two-tier tillage, draft resistance, parameter improvement, soil mechanics, critical depth, MATLAB.
**For citation:** Khafizov K. A., Miftakhov M. A., Khafizov R. N. Improvement of the design parameters of a two-tier soil ripper // Vestnik of Ulyanovsk state agricultural academy. 2026.3 (75): 249-256 doi:10.18286/1816-4501-2026-3-249-256

**Введение**

Современный этап развития сельскохозяйственного производства характеризуется неуклонным ростом энергонасыщенности машинно-тракторных агрегатов (МТА). Воздействие ходовых систем тяжёлых тракторов (серии К-744, John Deere 9R/8R, Case IH Quadtrac и др.) на почву носит кумулятивный характер. Деформация от колёс и гусениц распространяется на глубину 0,50…0,8 м, формируя устойчивые зоны переуплотнения в подпахотном горизонте [1, 2, 3]. Плотность сложения в следе трактора возрастает на 20…30 %, достигая для суглинистых почв критических значений 1500…1700 кг/м³, при которых прекращается развитие корневой системы растений [4]. Твердость почвы в колее может увеличиваться в 2–3 раза по сравнению с фоновым значением, создавая механический барьер для проникновения в нее влаги и корней [4].

Потери урожайности зерновых культур в следах тракторов составляют 10…15 %, а для пропашных культур – 30…50 % [3]. Удельное сопротивление при обработке уплотнённого фона возрастает на 15…65 % [4]. Суммарная площадь следов движителей может покрывать от 40 % до 100 % поверхности поля за сезон [5, 6].

Согласно модели Годвина – Спура [8, 9, 10], существует критическая глубина обработки, зависящая от ширины рабочего органа. При работе глубже критической отметки разрушение почвы переходит из режима скалывания вверх в режим бокового уплотнения. Двухъярусная компоновка решает эту проблему: верхний ярус (лемех с крыльями) разрушает верхний слой и создаёт свободную поверхность; нижний ярус (долото) работает в условиях сниженной эффективной глубины, оставаясь в режиме активного скалывания.

Цель исследования – разработка научно обоснованной математической модели двухъярусного тандемного рыхлителя следов трактора для оптимизации его геометрических параметров, обеспечивающих минимальное тяговое сопротивление при максимальном объеме разрыхленной почвы.

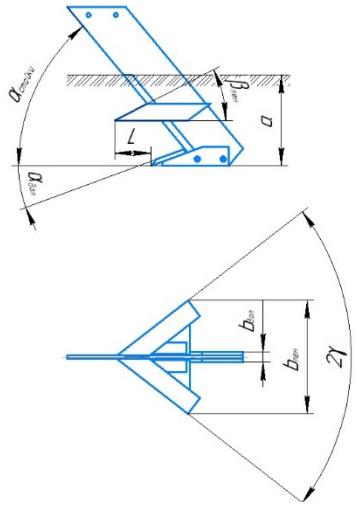


**Рис. 1. Конструктивная схема рыхлителя следов трактора с наклонной стойкой и его параметры**

**Материалы и методы**

Ниже приведены обозначения параметров рыхлителя и свойств почвы, используемые в данной работе. Система обозначений согласована со схемой рабочего органа (рис. 1).

**Таблица 1. Оптимизируемые параметры рабочего органа**

| Обозначение* | Описание | Мин. | Макс. | Единица измерения | Источник |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_{лем}$ | Ширина захвата лемеха | 0,50 | 0,60 | м | [1, 5] |
| $\beta_{лем}$ | Угол наклона лемеха | 15 | 30 | град. | [1, 9] |
| $\gamma$ | Половина угла раствора лемеха | 20 | 40 | град. | [1] |
| $b_{дол}$ | Ширина захвата долота | 0,04 | 0,08 | м | [5, 9] |
| $\alpha_{дол}$ | Угол постановки долота | 20 | 35 | град. | [1, 9] |
| $\alpha_{ст}$ | Угол наклона стойки назад | 0 | 45 | град. | [5] |
| $l_{дол}$ | Длина долота | 0,10 | 0,20 | м | [9] |
| $b_{ст}$ | Толщина стойки (поперёк движения) | 0,01 | 0,03 | м | [5, 9] |
| $L$ | Расстояние долото–лемех (вынос) | 0,10 | 0,45 | м | [5] |
| $a_п$ | Полная глубина обработки | 0,3 | 0,5 | м | [7] |
| $a_в$ | Глубина обработки верхнего яруса | 0,09 | 0,275 | м | Принимают по результатам расчетов |
| $r_{яр}$ | Доля верхнего яруса $a_в/a_п$ | 0,30 | 0,55 | – | Оптимизируемый параметр |
| $d_{ст}$ | Ширина стойки (вдоль направления движения) | 0,03 | 0,08 | м | [5, 9] |
| $h_{лем}$ | Высота лемеха | 0,05 | 0,12 | м | Исходный конструкционный параметр |

*Примечание: Все последующие формулы и расчёты используют эти обозначения.

Критерий прочности Кулона–Мора (условие разрушения почвы):

$$\tau_{\text{пред}} = c + \sigma_n \cdot tg(\varphi),$$

где $\tau_{\text{пред}}$ – предельное касательное напряжение сдвига, Па; $c$ – удельное сцепление, Па; $\sigma_n$ – нормальное напряжение на площадке сдвига, Па; $\varphi$ – угол внутреннего трения, град. (табл. 2).

**Таблица 2. Физико-механические свойства почвы (входные параметры**

| Обозначение | Описание | Диапазон | Ед. изм. | Источник |
|---|---|---|---|---|
| $\rho_п$ | Плотность пахотного слоя | 900…1400 | кг/м³ | [4, 11] |
| $\rho_{пп}$ | Плотность подпахотного слоя | 1200…1800 | кг/м³ | [4] |
| $p_{тв}$ | Твёрдость почвы | 0,5…8,0 | МПа | [1, 4] |
| $\varphi$ | Угол внутреннего трения | 18…42 | град | [8, 11] |
| $f$ | Коэффициент трения почва–металл | 0,25…0,75 | – | [1, 11] |
| $c$ | Удельное сцепление | 5…60 | кПа | [8] |
| $q_0$ | Уд. сопротивление при *v* = 1 м/с | 15…60 | кПа | [1, 7] |
| $K_v$ | Коэффициент влияния скорости | 0,01…0,06 | – | [1, 7] |

Примечание: Диапазоны в таблице 2 охватывают как дерново-подзолистые (нижняя часть интервалов плотности, сцепления), так и серые лесные среднесуглинистые почвы (средняя и верхняя часть интервалов). Для серых лесных почв Татарстана типичны: $\rho_п$ = 1100…1400 кг/м³, *c* = 15…40 кПа, ф = 25…35°. Для дерново-подзолистых почв: $\rho_п$ = 900…1200 кг/м³, *c* = 5…25 кПа, ф = 18…28° [2, 8, 11].

Методологическую основу исследований составляют:

1) теория предельного равновесия Хеттиаратчи - Риса [12, 13, 14] – "Универсальное уравнение землеройки" (Universal Earthmoving Equation), описывающее пассивное давление грунта на рабочий орган через безразмерные N-факторы;

2) модель трёхмерного разрушения Годвина – Спура [8, 9, 10] – учитывает боковое скалывание почвы узкими стойками ("полумесяцы разрушения") и критическую глубину;

3) модель Мак-Кайса [15] – упрощённая модель плоского клина для оптимизации угла скалывания.

**Таблица 3. Свойства почвы для фонового и уплотнённого состояний**

| Параметр | Обозначение | Фоновое значение | Значение в следе трактора | Единица измерения |
|---|---|---|---|---|
| Плотность пахотного слоя | $\rho_п$ | 1100…1300 | 1400…1650 | кг/м³ |
| Плотность подпахотного слоя | $\rho_{пп}$ | 1200…1400 | 1500…1800 | кг/м³ |
| Твёрдость | $p_{тв}$ | 1,0…2,0 | 3,0…5,0 и более | МПа |
| Угол внутреннего трения | $\varphi$ | 20…25 | 30…35 | град. |
| Удельное сцепление | $c$ | 5…15 | 20…40 | кПа |
| Адгезия к стали | $c_a$ | 3…8 | 10…15 | кПа |
| Коэффициент трения почва–металл | $f$ | 0,30…0,45 | 0,45…0,65 | – |

Примечание: Данные таблицы 3 получены из источников [2, 4, 8, 11] и характерны для серых лесных среднесуглинистых почв Среднего Поволжья. Для дерново-подзолистых почв фоновые значения $\rho_п$ ниже на 100…200 кг/м³, значения с ниже на 5…10 кПа.

Рассмотрим двухъярусный рыхлитель при взаимодействии с почвенным монолитом как сложную систему, состоящую из двух взаимозависимых подсистем: верхнего яруса и нижнего яруса. Главная гипотеза модели состоит в принципе суперпозиции полей напряжений с учетом изменения граничных условий для нижнего яруса.

Для реализации математической модели и поиска оптимальных параметров применим метод повариантного анализа (анализ чувствительности). Модель представим в виде системы нелинейных уравнений, описывающих силы сопротивления на каждом ярусе с учетом их взаимного влияния. В качестве критерия оптимизации (целевой функции) выберем удельное тяговое сопротивление $q_{уд}$, равное отношению полной силы тяги $R_{полн}$ к площади поперечного сечения взрыхленной зоны $S_{разр}$:$q_{уд} = R_{полн}/S_{разр}$.

Верхний ярус (лемех с крыльями) работает на глубине $a_в$ в ненарушенном (уплотнённом) полупространстве. Расчёт основан на модифицированном уравнении Хеттиаратчи - Риса с учётом трёхмерного эффекта Годвина – Спура.

Горизонтальная составляющая силы сопротивления верхнего яруса

$$R_{верх} = (\gamma_п \cdot {a_в}^2 \cdot N_\gamma + c \cdot a_в \cdot N_c + c_a \cdot a_в \cdot N_a) \cdot b_{лем} \cdot K_{фверх}\ , \quad (1)$$

где: $R_{верх}$ – горизонтальная сила сопротивления верхнего яруса, Н; $\gamma_п = \rho_п \cdot g$ - удельный вес почвы пахотного слоя, Н/м³, $\rho_п$ – плотность пахотного слоя, g = 9,81 м/с² - ускорение свободного падения; $a_в = r_{яр} \cdot a_п$ - глубина хода верхнего яруса, м; *c* - удельное сцепление почвы, Па; $c_a$ – адгезия почвы к стали, Па; $b_{лем}$ - ширина захвата лемеха, м; $N_\gamma, N_c, N_a$ – безразмерные N-факторы Мак-Кайса – Али [15], зависящие от угла резания $\beta_{лем}$, угла внутреннего трения $\varphi$, угла трения почва-металл $\delta = arctg(f)$ и оптимального угла разрушения $\rho$; $K_{ф.верх}$ - коэффициент формы (трёхмерности) [15], учитывающий боковое расширение зоны разрушения.

Член уравнения (1) с $N_\gamma$ описывает гравитационную составляющую (вес поднимаемого клина), член с $N_c$ - когезионную (разрыв связей сцепления), член с $N_a$ - адгезионную (прилипание почвы к стали). Вычисление N-факторов основано на модели плоского клина Мак-Кайса – Али [15], адаптированной для пассивного давления грунта на почворезающий рабочий орган. Модель рассматривает равновесие почвенного клина, отсекаемого плоскостью разрушения под углом $\rho$ к горизонтали.

Для заданного угла разрушения $\rho$ (от горизонтали) введем вспомогательную величину К:

$$K = ctg(\alpha + \delta) + ctg(\rho + \varphi)\ , \quad (2)$$

где $\alpha$ – угол резания рабочего органа, рад (для верхнего яруса $\alpha = \beta_{лем}$); $\delta = arctg(f)$ - угол трения почва–металл, рад; $\varphi$ – угол внутреннего трения, рад; $\rho$ - угол наклона плоскости разрушения от горизонтали, рад.

N-факторы Мак-Кайса – Али следующие:

• гравитационный $N_\gamma = [ctg(\alpha) + ctg(\rho)] / (2 \cdot K)$; (3)

• когезионный $N_c = 1 / [sin(\rho) \cdot K]$; (4)

• адгезионный $N_a = 1 / [sin(\alpha) \cdot K]$ ; (5)

• пригрузочный $N_q = [ctg(\alpha) + ctg(\rho)] / K = 2 \cdot N_\gamma$ . (6)

Оптимальный угол $\rho_{опт}$ определяется перебором от 5° до 85° с шагом 1° и выбором $\rho$, дающего минимальную суммарную силу (почва разрушается по плоскости наименьшего сопротивления). В программе MATLAB реализован именно этот подход.

Формулы (3) – (6) специально разработаны для задачи резания почвы [15]. Они всегда дают положительные N-факторы при пассивном давлении. Для типичных условий ( $\alpha$ = 22…27°, $\varphi$ = 30…35°, f = 0,50): $N_\gamma \approx$ 1,2…1,8, $N_c \approx$ 1,2…1,6, $N_a \approx$ 1,5…2,0, $N_q \approx$ 2,5…3,5 [15].

Для перехода от двумерной (плоской) задачи к реальной трёхмерной геометрии по модели Годвина – Спура [8, 9]:

$$K_{ф.верх} = 1 + (a_в / b_{лем}) \cdot K_{бок} , \quad (7)$$

где $K_{бок}$ - коэффициент бокового скалывания [15], зависящий от угла внутреннего трения ф:

$$K_{бок} \approx 0{,}5\,(1 + tg\varphi) , \quad (8)$$

Безразмерный коэффициент $K_{бок}$ меняется в диапазоне 0,7…1,2 при $\varphi$ = 18…42° [8, 9]. Для узких стоек ($b_{дол}/a_в << 1$) коэффициент формы значительно больше единицы, что отражает существенный вклад боковых "полумесяцев" скалывания.

Формула (7), в сущности, увеличивает расчётную силу за счёт боковых сколов. Для лемеха ($b_{лем}$ = 0,50…0,60 м при $a_в$ = 0,15…0,25 м) отношение $a_в / b_{лем} \approx$ 0,3…0,5, что даёт $K_{ф.верх} \approx$ 1,2…1,5. Для долота ($b_{дол}$ = 0,04…0,08 м при $a_н$ = 0,15…0,25 м); $a_в / b_{лем} \approx$ 2…6, и $K_ф$ достигает 2…7, что означает доминирование трёхмерных эффектов.

Критический элемент модели - описание условий работы нижнего яруса после прохода верхнего. Верхний ярус разрыхляет слой почвы толщиной $a_в$, что кардинально меняет следующие условия для нижнего яруса:

1 Снижение эффективной глубины. Нижний ярус (долото) работает не в сплошном массиве глубиной $a_п$, а в ослабленном слое. Эффективная высота стенки скалывания:

$$a_{н.эфф} = a_п - a_в = a_п(1 - r_{яр}) , \quad (9)$$

где $a_{н.эфф}$ - эффективная глубина для расчёта сил на нижнем долоте, м.

Снижение эффективной глубины является главным механизмом энергосбережения двухъярусной схемы почвообрабатывающего орудия. При $a_п$ = 0,45 м и $r_{яр}$ = 0,35 имеем $a_{н.эфф}$ = 0,315 м, что меньше критической глубины (обычно 0,35…0,5 м для долота шириной 0,06 м).

2 Изменение пригрузки (вертикальной распределённой нагрузки, приложенной к свободной поверхности почвы над зоной разрушения и создающей дополнительное нормальное напряжение на площадке скалывания). Разрыхленный верхний слой толщиной $a_в$ теряет сцепление и имеет пониженную плотность. В модели он учитывается как распределённая внешняя нагрузка:

$$q_{разр} = \rho_{п.разр}\, g\, a_в , \quad (10)$$

где $\rho_{п.разр}$ - плотность разрыхлённого слоя, кг/м³, принимают

$$\rho_{п.разр} = 0{,}7\, \rho_п \quad (11)$$

Коэффициент 0,7 (снижение плотности на 30 % при рыхлении) является общепринятым [2, 11]. Для уплотнённой серой лесной почвы ($\rho_п$ = 1500 кг/м³) получаем $\rho_{п.разр} \approx$ 1050 кг/м³. Пригрузка $q_{разр}$ энергетически значительно выгоднее, чем скалывание монолита той же толщины, так как в ней отсутствуют сцепленные частицы.

Силу сопротивления нижнего яруса рассчитаем для модифицированных условий. Основное уравнение для нижнего долота:

$$R_{нижн} = \left(\gamma_{пп} \cdot {a_{н.эфф}}^2 \cdot N_\gamma' + c \cdot a_{н.эфф} \cdot N_c' + c_a \cdot a_{н.эфф} \cdot N_a' + q_{разр} \cdot a_{н.эфф} \cdot N_q'\right) \cdot b_{дол} \cdot K_{ф.нижн}, \quad (12)$$

где: $R_{ниж}$ - горизонтальная сила сопротивления нижнего яруса, Н; $\gamma_{пп} = \rho_{пп} \cdot g$ - удельный вес подпахотного слоя, Н/м³; $a_{н.эфф}$ - эффективная глубина нижнего яруса, м; с - сцепление подпахотного горизонта, Па; для нижнего яруса используют $c = c_{подпах}$ (20…40 кПа в следе); $q_{разр}$ - пригрузка от разрыхлённого верхнего слоя, Па; $b_{дол}$ - ширина захвата долота, м; $N_\gamma', N_c', N_a', N_q'$- N-факторы Мак-Кайса – Али для нижнего яруса, рассчитанные при $\alpha = \alpha_{дол}$ (угол постановки долота, 20…35°); $K_{ф.нижн} = 1 + (a_{н.эфф} / b_{дол}) \cdot K_{бок}$- коэффициент формы для нижнего яруса [15].

Ключевое отличие формулы (12) от (1) заключается в том, что: а) используется $a_{н.эфф} << a_н$; б) член $q_{разр}$ заменяет скалывание верхнего монолита, так как работа по поднятию рыхлого грунта требует значительно меньше энергии, чем его разрушение; в) добавлен член $c_a N_a'$ (адгезия); г) N-факторы вычисляют при угле $\alpha_{дол}$, который в лучшую сторону отличается от $\beta_{лем}$.

Продольное расстояние L между долотом и лемехом определяет, насколько эффективно нижний ярус использует зону разрыхления верхнего.

Если $L < a_в \cdot ctg\beta_0$, поверхность скалывания от нижнего яруса "упирается" в неразрушенный массив, приводя к возникновению блокированного режима. Эффект облегчения частичен.

Если $L > a_п \cdot ctg\beta_0$, происходит полное восстановление давления и эффект облегчения пропадает.

Оптимальное условие:

$$L_{опт} = a_в \cdot ctg(\rho_{опт}) , \quad (13)$$

где $\rho_{опт}$ – оптимальный угол разрушения, найденный по Мак-Кайсу – Али. При выполнении условия (13) плоскость скола нижнего яруса выходит точно в дно борозды верхнего яруса, встречая минимальное сопротивление.

Суммарное тяговое сопротивление рыхлителя:

$$R_{полн} = R_{верх} + R_{нижн} + R_{ст} + R_{ин} , \quad (14)$$

где $R_{ст}$ – сила трения стойки о почву, Н; $R_{ин}$ - инерционная составляющая, Н.

Сопротивление стойки (ее части, находящейся в не разрыхленном массиве):

$$R_{ст} = 0{,}5 f \gamma_{пп} a_{н.эфф}{}^2 d_{ст}, \quad (15)$$

где f – коэффициент трения почва–металл [11]; $d_{ст}$ - ширина стойки вдоль движения, м.

Инерционная составляющая (важна при скоростях 8…12 км/ч):

$$R_{ин} = \rho_{п} \left(a_{в} b_{лем} + a_{н.эфф} b_{дол}\right) v^2, \quad (16)$$

где v – рабочая скорость, м/с. При v = 2,5 м/с (9 км/ч) вклад инерционной составляющей достигает 20…30 % [1, 7].

Удельное тяговое сопротивление (целевая функция)

$$q_{уд} = R_{полн}/S_{разр}, \quad (17)$$

где $S_{разр}$ – площадь поперечного сечения разрыхлённой зоны, м² [16, 17]:

$$S_{разр} = b_{лем} a_{в} + b_{дол} a_{н.эфф} \quad + K_{бок} a_{н.эфф}{}^2. \quad (18)$$

Последний член формулы (18) учитывает боковые "полумесяцы" скалывания нижнего яруса. Минимизация $q_{уд}$ позволяет получить оптимальные параметры рыхлителя.

Критическая глубина $a_{кр}$ – граница перехода из режима скалывания (рыхления) в режим бокового уплотнения [8, 9]:

$$a_{кр} \approx (6\ldots9)\, b_{дол}. \quad (19)$$

Множитель перед $b_{дол}$ зависит от $\varphi$ и формы долота: при $\varphi$ = 25…35° множитель ≈ 6…9 [8, 9]. Для $b_{дол}$ = 0,06 м $a_{кр}$ ≈ 0,36…0,54 м.

Условие эффективной работы каждого яруса:

$$a_{в} < a_{кр.верх} \text{ и } a_{нэфф} < a_{кр.нижн}. \quad (20)$$

Для долота с $b_{дол}$ = 60 мм: $a_{кр}$ ≈ 0,42 м. Одноярусный рыхлитель на глубине 0,45 м работает за критической отметкой. У двухъярусного рыхлителя при $r_{яр}$ = 0,3 $a_{н.эфф}$ = 0,315 м < 0,42 м, следовательно, условие (20) выполняется.

Приведём пошаговый алгоритм расчёта тягового сопротивления двухъярусного рыхлителя.

Шаг 1. Задание исходных данных

Задать геометрические параметры из таблицы 1 и физико-механические свойства почвы из таблицы 2 (или таблицы 3 для конкретных условий).

Шаг 2. Вычисление производных геометрических параметров:

$a_{в} = r_{яр} a_{п}$;

$a_{н.эфф} = a_{п} - a_{в} = a_{п} \ (1 - r_{яр})$;

$\delta = arctg(f)$ - угол трения почва–металл;

$\beta_0 = 45° - \varphi/2$- угол скалывания;

$\gamma_{п} = \rho_{п}\, g, \ \gamma_{пп} = \rho_{пп}\, g$.

Шаг 3. Расчёт N-факторов Мак-Кайса – Али для верхнего яруса:

$\delta = arctg(f)$ - угол трения почва–металл;

перебор ρ от 5° до 85°, для каждого ρ:

$K = ctg(\beta_{лем} + \delta) + ctg(\rho + \varphi)$;

$N_\gamma = [ctg(\beta_{лем}) + ctg(\rho)] / (2 \cdot K)$;

$N_c = 1 / [sin(\rho) \cdot K]$, $N_a = 1 / [sin(\beta_{лем}) \cdot K]$;

$P = \gamma_{п} \cdot N_\gamma + c \cdot N_c + c_a \cdot N_a$ → выбрать ρ с минимальной P.

Шаг 4. Коэффициент формы верхнего яруса:

$K_{бок} = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot tg(\varphi)$;

$K_{ф.верх} = 1 + (a_{в}/b_{лем}) \cdot K_{бок}$.

Шаг 5. Сила сопротивления верхнего яруса:

$$R_{верх} = \left(\gamma_{п} \cdot a_{в}{}^2 \cdot N_{\gamma.верх} + c \cdot a_{в} \cdot N_{c.верх} + c_a \cdot a_{в} \cdot N_{a.верх}\right) b_{лем} K_{ф.верх}.$$

Шаг 6. Пригрузка от разрыхлённого слоя:

$\rho_{п.разр} = 0{,}7 \rho_{п}$;

$q_{разр} = \rho_{п.разр} g\, a_{в}$.

Шаг 7. Расчёт N-факторов Мак-Кайса – Али для нижнего яруса:

перебор ρ от 5° до 85°, для каждого ρ:

$K = ctg(\alpha_{дол} + \delta) + ctg(\rho + \varphi)$;

$N_\gamma' = [ctg\alpha_{дол}) + ctg(\rho)] / (2 \cdot K)$;

$N_c' = 1 / [sin(\rho) \cdot K]$, $N_a' = 1 / [sin(\alpha_{дол}) \cdot K]$;

$N_q' = 2 N_\gamma'$ (пригрузочный фактор);

$P = \gamma_{пп} N_\gamma' + c N_c' + c_a N_a'$ → выбрать ρ с минимальной P.

Шаг 8. Коэффициент формы нижнего яруса:

$K_{ф.нижн} = 1 + \left(a_{н.эфф} / b_{дол}\right) \cdot K_{бок}$.

Шаг 9. Сила сопротивления нижнего яруса:

$R_{нижн} = \left(\gamma_{пп} \cdot a_{н.эфф}{}^2 \cdot N_\gamma' + c \cdot a_{н.эфф} N_c' + c_a a_{н.эфф} N_a' + q_{разр} a_{н.эфф} N_q'\right) b_{дол} K_{ф.нижн}$.

Шаг 10. Сопротивление стойки и инерционная составляющая:

$R_{ст} = f \gamma_{пп} a_{н.эфф}{}^2 d_{ст} / 2$;

$R_{ин} = \rho_{п}\left(a_{в}\, b_{лем} + a_{н.эфф}\, b_{дол}\right) v^2$.

Шаг 11. Полное тяговое сопротивление:

$R_{полн} = R_{верх} + R_{нижн} + R_{ст} + R_{ин}$.

Шаг 12. Удельное тяговое сопротивление:

$S_{разр} = b_{лем}\, a_{в} + b_{дол}\, a_{н.эфф} \quad + K_{бок}\, a_{н.эфф}{}^2$;

$q_{уд} = R_{полн}/S_{разр}$.

Шаг 13. Оптимизация:

варьировать $r_{яр}$ от 0,30 до 0,55, L от 0,15 м до 0,45 м, $\beta_{лем}$ от 15° до 30°, $\alpha_{дол}$ от 20° до 35° (табл. 1) и найти минимум $R_{полн}$ или $q_{уд}$. В программе MATLAB это реализовано вложенными циклами (повариантный анализ).

**Результаты**

Результаты численного эксперимента получены для серой лесной среднесуглинистой почвы в следе трактора (табл. 3): $\rho_{п}$ = 1500 кг/м³, $\rho_{пп}$ = 1800 кг/м³, c = 30 кПа, $\varphi$ = 35°, f = 0,65, $a_{п}$ = 0,45 м, $\beta_{лем}$ = 0,5 м, $b_{дол}$ = 0,045 м, v = 2,5 м/с (9 км/ч).

**Таблица 4.Зависимость тягового сопротивления от $r_{яр}$**

| $r_{яр}$ | $a_{в}$, м | $a_{н}$, м | $R_{верх}$, кН | $R_{нижн}$, кН | $R_{полн}$, кН | $q_{уд}$, кПа |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,000 | 0,450 | 0,0 | 20,2 | 20,5 | 106 |
| 0,05 | 0,023 | 0,427 | 0,8 | 18,3 | 19,5 | 105 |
| 0,10 | 0,045 | 0,405 | 1,7 | 16,6 | 18,7 | 104 |
| 0,15 | 0,068 | 0,383 | 2,6 | 14,9 | 18,1 | 103 |
| 0,20 | 0,090 | 0,360 | 3,7 | 13,3 | 17,6 | 103 |
| 0,25 | 0,113 | 0,338 | 4,8 | 11,8 | 17,3 | 103 |
| **0,30** | **0,135** | **0,315** | **6,0** | **10,4** | **17,2** | **104** |
| **0,35** | **0,158** | **0,292** | **7,2** | **9,10** | **17,2** | **105** |
| 0,40 | 0,180 | 0,270 | 8,6 | 7,80 | 17,4 | 106 |

Анализ данных таблицы 4 показал, что оптимальное значение доли верхнего яруса при минимальном полном тяговом сопротивлении двухъярусного рыхлителя находится в диапазоне $r_{яр}$ = 0,30…0,35 (табл. 4 и рис. 2), что соответствует глубине верхнего яруса 0,14…0,16 м и глубине нижнего яруса 0,31…0,29 м. Снижение $R_{полн}$ в оптимальной точке превышает 16 % по сравнению с одноярусным рыхлителем.

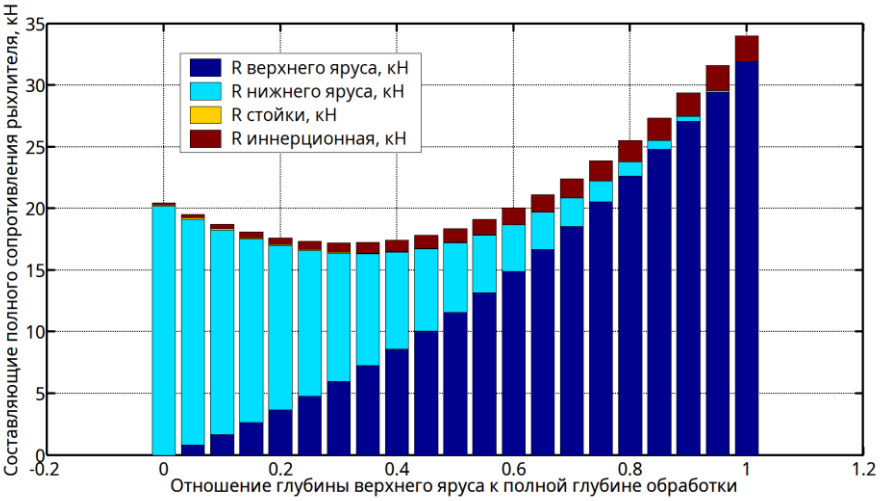



**Рис. 2. Структура составляющих тягового сопротивления при разных глубинах ярусов**

Увеличение $\alpha_{дол}$ с 20° до 45° приводит к росту тягового сопротивления на 40…50 %. Однако слишком малые углы ($\alpha_{дол}$ < 20°) ухудшают заглубляющую способность рабочего органа при воздействии почвы на долото. Оптимальный диапазон: $\alpha_{дол}$ = 25…30°, $\beta_{лем}$ = 20…25°. При этом степень крошения почвы будет в пределах 81…83 %.

Для долота $b_{дол}$ = 0,045 м расчётная критическая глубина $a_{кр}$ = 0,337 м (по формуле 19).

При одноярусной обработке на глубину $a_{п}$ = 0,45 м нижние 10…15 см обрабатываются в закритическом режиме. Двухъярусная схема ($r_{яр}$ = 0,30, $a_{н.эфф}$ = 0,315 м) гарантирует работу обоих ярусов в режиме скалывания (формула (20) выполняется). Оптимальный вынос $L_{опт} = a_{в} \cdot ctg(p_{о.опт}) = 0{,}135 \cdot ctg(29) = 0{,}244$ м близок к заданному при расчетной величине $L$ = 0,2 м. Обработка почвы на глубину 0,45 м только долотом (рис. 2) дает сопротивление 20 кН, тогда как обработка почвы на эту глубину только лемехом приводит к увеличению тягового сопротивления до 34 кН. Оптимальное сопротивление при работе двух ярусов снижается до 17 кН.

**Обсуждение**

Выполненное исследование показало, что разработанная аналитическая модель, объединяющая теорию предельного равновесия Хеттиаратчи – Риса, трёхмерную модель разрушения Годвина – Спура и модель плоского клина Мак-Кайса – Али, позволяет количественно связать геометрические параметры двухъярусного рыхлителя следов трактора с его тяговым сопротивлением и качеством крошения почвы. Основной результат численного эксперимента состоит в том, что рациональное распределение глубины обработки между ярусами обеспечивает снижение полного тягового сопротивления орудия на 15…18 % по сравнению с одноярусной схемой при обработке уплотнённой серой лесной почвы на глубину 0,45 м. Оптимальная доля верхнего яруса составляет $r_{яр}$ = 0,30…0,35 при глубине обработки верхним ярусом 0,14…0,16 м. Рациональным следует считать продольный вынос долота относительно лемеха $L \approx 0{,}2$ м, угол постановки долота $\alpha_{дол}$ = 25…30°, угол наклона лемеха $\alpha_{лем}$ = 20…25°; при этом расчётная степень крошения почвы составит 81…83 %.

Полученная зависимость тягового сопротивления от доли верхнего яруса (табл. 4) показывает, что при изменении $r_{яр}$ от 0,25 до 0,40 полное сопротивление остаётся практически постоянным (17,2…17,6 кН), тогда как вклады отдельных ярусов изменяются существенно: сопротивление верхнего яруса растёт примерно с 4,8 кН до 8,6 кН, а нижнего – падает с 11,8 кН до 7,8 кН. Это объясняется встречным характером двух процессов: с увеличением $r_{яр}$ возрастает объём работы лемеха в уплотнённом монолите, но одновременно снижается эффективная глубина долота и, следовательно, его сопротивление. Минимум целевой функции достигается в точке, где приращение сопротивления верхнего яруса уравновешивается убыванием сопротивления нижнего.

Теоретической основой наблюдаемого эффекта служит концепция критической глубины. Для долота шириной 0,045 м расчётная критическая глубина $a_{кр} \approx 0{,}337$ м. При одноярусной обработке на глубину 0,45 м нижние 0,1…0,15 м массива разрушаются в энергетически невыгодном режиме бокового уплотнения при низком качестве рыхления. Двухъярусная компоновка переводит работу обоих деформаторов в докритическую зону активного скалывания: верхний ярус формирует свободную поверхность и снимает слой толщиной $a_{в}$, а нижний работает уже на сниженной эффективной глубине $a_{н.эфф} = a_{п} - a_{в}$. Второй механизм энергосбережения — изменение характера нагрузки над зоной действия долота: вместо скалывания связного монолита долото преодолевает лишь вес разрыхлённого несвязного слоя, входящего в модель как пассивная пригрузка $q$ (формулы 10, 11). Поскольку для уплотнённой почвы когезионная

составляющая сопротивления доминирует, устранение необходимости разрывать связи сцепления в верхнем слое, в основном, и влияет на снижение тягового сопротивления.

Полученные оценки согласуются с известными теоретическими и экспериментальными данными. Существование критической глубины и переход от скалывания к боковому уплотнению установлены в классических работах Годвина и Спура [8, 10] и подтверждены в работе [11]. Полученные нами значения $a_{кр}$ (порядка 0,34…0,54 м для долот шириной 0,045…0,06 м) попадают в диапазоны, указанные в этих источниках. Эффективность тандемных и многоярусных стоек как средства снижения энергоёмкости отмечалась в сравнительных исследованиях рабочих органов глубокорыхлителей [18], а полученное снижение тягового сопротивления 15…20 % сопоставимо с приведенными в научных трудах оценками для модифицированных стоек. Применённый аппарат безразмерных *N*-факторов восходит к универсальному уравнению Хеттиаратчи – Риса [12, 13, 14] и модели Мак-Кайса [15], а учёт скоростной (инерционной) составляющей соответствует данным об удельном сопротивлении почв [1, 7]. Вместе с тем, в отличие от большинства работ, рассматривающих ярусы изолированно, в настоящей модели реализован принцип суперпозиции полей напряжений с явным учётом изменения граничных условий для нижнего яруса, что и составляет её основной методический вклад.

При интерпретации результатов следует учитывать ряд ограничений. Во-первых, результаты получены аналитически (повариантный анализ в среде MATLAB) и пока не подкреплены экспериментальными исследованиями. Во-вторых, предполагались квазистатический режим деформирования и однородность почвы в пределах каждого горизонта, тогда как реальный почвенный пласт неоднороден по плотности и влажности. В-третьих, инерционная составляющая учтена в упрощённом виде, а влажность, существенно влияющая на сцепление и адгезию, входит в модель лишь косвенно — через диапазоны входных параметров (табл. 2, 3). В-четвёртых, коэффициент снижения плотности при рыхлении (0,7) и множитель в выражении для критической глубины приняты осреднёнными по литературе [2, 8, 11] и могут отличаться для конкретных почв.

Дальнейшие исследования целесообразно направить, прежде всего, на экспериментальную верификацию модели: тензометрирование рабочих органов в почвенном канале и в полевых условиях для серых лесных и дерново-подзолистых почв различной влажности с последующей идентификацией параметров модели. Перспективным представляется сопоставление аналитической модели с численными расчётами методами дискретных (DEM) и конечных (FEM) элементов, которые позволяют визуализировать поля напряжений и зоны разрушения. Отдельного изучения требует поведение модели при повышенных рабочих скоростях (8…12 км/ч), при которых возрастает вклад инерционной составляющей.

Предложенный пошаговый алгоритм расчёта может служить инженерной основой проектирования двухъяруных рыхлителей следов трактора. Рекомендуемое сочетание параметров ($r_{яр}$ = 0,30…0,35, $L \approx 0{,}2$ м, $\alpha_{дол}$ = 25…30°, $\alpha_{лем}$ = 20…25°, $b_{дол} \approx 0{,}045$ м, $b_{лем} \approx 0{,}50$ м) обеспечивает работу обоих ярусов в режиме скалывания и снижение тягового сопротивления, что приводит к экономии топлива и позволяет либо применить трактор меньшего класса тяги, либо увеличить ширину захвата агрегата. С агротехнической точки зрения восстановление структуры переуплотнённого подпахотного горизонта в следах движителей снижает потери урожайности от переуплотнения почвы, достигающие 10…15 % для зерновых и 30…50 % для пропашных культур [3]. Таким образом, оптимизированный двухъярусный рыхлитель представляет собой энергоэффективное средство технологической реабилитации почв, деградировавших под воздействием тяжёлой техники классов тяги 5…8.

**Заключение**

1. Разработанная математическая модель на основе теорий Хеттиаратчи - Риса и Годвина – Спура с единой системой обозначений (табл. 1, 2) адекватно описывает процесс взаимодействия двухъярусного рыхлителя с уплотнённой почвой.

2. Двухъярусная схема почвообрабатывающего орудия обеспечивает снижение его тягового сопротивления на 15…18 % по сравнению с одноярусным орудием при обработке серых лесных и дерново-подзолистых почв на глубину 0,45 м.

3. Оптимальными параметрами двухъярусного рыхлителя, обеспечивающими минимальное тяговое сопротивление, являются следующие: отношение глубины верхнего яруса к общей глубине обработки $r_{яр}$ = 0,30…0,35 (равномерное распределение); расстояние между долотом и лемехом $L \approx (1{,}2 \ldots 1{,}6) \cdot a_в$; угол постановки долота $\alpha_{дол} = 25 \ldots 30°$; угол наклона лемеха $\beta_{лем} = 20 \ldots 25°$; ширина захвата долота $b_{дол}$ = 0,045 м; ширина захвата лемеха $b_{лем}$ = 0,50 м.

**Литература**

1. Modern farm vehicles can damage soil for decades // World Economic Forum, 2022. URL: https://www.weforum.org/stories/2022/05/modern-farm-vehicles-dinosaurs-damage-soil-decades-study/ (дата обращения: 15.02.2026).

2. Повышение эффективности использования прицепного опрыскивателя путем снижения потерь урожая / А. А. Нурмиев, К. А. Хафизов, Р. Н. Хафизов и др. // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2023. Т. 18, № 3(71). С. 92-101. doi: 10.12737/2073-0462-2023-92-101

3. Хафизов, К. А., Хафизов Р.Н., Нурмиев А. А. Анализ влияния энергоемкости технологической операции на оптимальные значения основных параметров трактора «Беларусь» // Вестник Казанского государственного аграрного университета. 2025. Т. 20. № 2(78). С. 113-124. doi: 10.12737/2073-0462-2025-113-124

4. Уплотнение почвы под влиянием колесных и гусеничных тракторов // БГАТУ. URL: https://rep.bsatu.by/bitstream/doc/22194/1/uplotnenie-pochvy-pod-vliyaniem-

kolesnyh-i-gusenichnyh-traktorov.pdf (дата обращения: 18.02.2026).

5. Investigation of various options for processing gray forest soil in a field crop rotation/ Balabanov V. I., Afanasiy Lee, Begmat Norov, et al. // E3S Web of Conf., 2021. doi: 10.1051/e3sconf/202127304025

6. Recent Study Estimates that Soil Compaction is Costing Farmers Millions // PTK. URL: https://www.ntstiresupply.com/ptk-shared/recent-study-estimates-that-compaction-is-costing-farmers-millions (дата обращения: 18.02.2026).

7. Тагиева Е. Х. Изучение физико-механических свойств и режимов обработки почвы в условиях современных технологических принципов // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. № 10. С. 62-67. doi: 10.33619/2414-2948/95/08

8. Godwin R. J., Spoor G. Soil Failure with Narrow Tines // J. Agric. Eng. Res., 1977. Vol. 22. P. 213-28.

9. Godwin R J and Spoor, G. Choosing and evaluating soil improvements by subsoiling and compaction control. In Visual Soil Evaluation: Realizing Potential Crop Production with Minimum Environmental Impact, 2015. 66. CABI. doi: 10.1079/9781780644707.0066

10. Spoor G., Godwin R.J. Tine options for alleviating compaction in wheelings // Journal of Agricultural Engineering Research. 1978. Vol. 23, Issue 3. P. 243-258.

11. Subsoiling Principles - Revisited // soilandwater.org. URL: https://soilandwater.org.uk/subsoiling-principles-revisited/ (дата обращения: 18.02.2026).

12. Hettiaratchi D.R.P., Reece A.R. The calculation of passive soil resistance // Géotechnique. 1974. Vol. 24. No. 3. P. 289–310.

13. Review of Models for Predicting Performance of Narrow Tillage Tool // Trans. ASAE. 1985. Vol. 28(4). P. 1062-1067.

14. Hettiaratchi D.R.P., Reece A.R. Symmetrical three-dimensional soil failure // J. Terramechanics, 1967. Vol. 4(3). P. 45–67.

15. McKyes E. Soil Cutting and Tillage. Amsterdam: Elsevier, 1985. 217 p.

17. Al-Kheer, Abd Al-Kareem & ELHami, Abdelkhalak & Kharmanda, Ghais & Mouazen, Abdul. (2011). Reliability-based design for soil tillage machines. Journal of Terramechanics. 48. 57-64. 10.1016/j.jterra.2010.06.001. https://www.researchgate.net/ (дата обращения: 18.02.2026).

18. A Comparative Study of Conventional and Modified Tine Types of Subsoiler // ResearchGate, 2019. https://www.researchgate.net/publication (дата обращения: 18.02.2026).

**References**

1. Modern farm vehicles can damage soil for decades // World Economic Forum, 2022. URL: https://www.weforum.org/stories/2022/05/modern-farm-vehicles-dinosaurs-damage-soil-decades-study/ (access date: 15.02.2026).

2. Improvement of the efficiency of a trailed sprayer by reducing yield losses / A. A. Nurmiev, K. A. Khafizov, R. N. Khafizov, et al. // Vestnik of the Kazan State Agrarian University. 2023. Vol. 18, No. 3(71). P. 92-101. doi: 10.12737/2073-0462-2023-92-101

3. Khafizov, K. A., Khafizov R. N., Nurmiev A. A. Analysis of the influence of the energy intensity of the technological operation on the optimal values of the main parameters of the Belarus tractor // Vestnik of the Kazan State Agrarian University. 2025. Vol. 20, No. 2(78). P. 113-124. doi: 10.12737/2073-0462-2025-113-124

4. Soil compaction under the influence of wheeled and tracked tractors // BSATU. URL: https://rep.bsatu.by/bitstream/doc/22194/1/uplotnenie-pochvy-pod-vliyaniem-kolesnyh-i-gusenichnyh-traktorov.pdf (access date: 18.02.2026).

5. Investigation of various options for processing gray forest soil in a field crop rotation / Balabanov V. I., Afanasiy Lee, Begmat Norov, et al. // E3S Web of Conf., 2021. doi: 10.1051/e3sconf/202127304025

6. Recent Study Estimates that Soil Compaction is Costing Farmers Millions // PTK. URL: https://www.ntstiresupply.com/ptk-shared/recent-study-estimates-that-compaction-is-costing-farmers-millions (accessed: 18.02.2026).

7. Tagieva E. Kh. Study of the physical and mechanical properties and modes of soil cultivation under modern technological principles // Vestnik of Science and Practice. 2023. Vol. No. 10. P. 62-67. doi: 10.33619/2414-2948/95/08

8. Godwin R.J., Spoor G. Soil Failure with Narrow Tines // J. Agric. Eng. Res., 1977. Vol. 22. P. 213-28.

9. Godwin, R J and Spoor, G. Choosing and evaluating soil improvements by subsoiling and compaction control. In Visual Soil Evaluation: Realizing Potential Crop Production with Minimum Environmental Impact. 2015. 66. CABI. doi: 10.1079/9781780644707.0066

10. Spoor G., Godwin R.J. Tine options for alleviating compaction in wheelings // Journal of Agricultural Engineering Research, 1978. Vol. 23. Issue 3. P. 243-258.

11. Subsoiling Principles - Revisited // soilandwater.org. URL: https://soilandwater.org.uk/subsoiling-principles-revisited/ (accessed 02/18/2026).

12. Hettiaratchi D.R.P., Reece A.R. The calculation of passive soil resistance // Géotechnique. 1974. Vol. 24.No. 3. P. 289-310.

13. Review of Models for Predicting Performance of Narrow Tillage Tool // Trans. ASAE. 1985. Vol. 28(4). P. 1062-1067.

14. Hettiaratchi D.R.P., Reece A.R. Symmetrical three-dimensional soil failure // J. Terramechanics. 1967. Vol. 4(3). P. 45–67.

15. McKyes E. Soil Cutting and Tillage. Amsterdam: Elsevier. 1985. 217 p.

17. Al-Kheer, Abd Al-Kareem & ELHami, Abdelkhalak & Kharmanda, Ghais & Mouazen, Abdul. Reliability-based design for soil tillage machines. Journal of Terramechanics. 2011. 48. С. 57-64. doi: 10.1016/j.jterra.2010.06.001. https://www.researchgate.net/ (access date: 02/18/2026).

18. A Comparative Study of Conventional and Modified Tine Types of Subsoiler // ResearchGate, 2019. https://www.researchgate.net/publication (access date: 18.02.2026).