УДК 372.862

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ВЕКТОРАМИ КАК ОСНОВА НОВОГО ПОДХОДА К ОПИСАНИЮ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Г.Е. Ананьин, кандидат педагогических наук,
e-mail: g.ananin@yarcx.ru
ФГБОУ ВО Ярославский ГАУ

Ключевые слова: *вектор, деление, переменный ток, активное сопротивление, реактивное сопротивление.*

В статье рассматривается новый подход к объяснению и описанию процессов в электрических цепях переменного тока, который не требует применения комплексных чисел. Обосновывается, что в рамках этого подхода целесообразно рассматривать синусоидальное напряжение и ток как векторные величины, причем активное сопротивление будет соответствовать их скалярному делению, а реактивное – векторному делению.

Обычный способ объяснения и описания процессов, происходящих в цепях переменного тока, основан на применении комплексных чисел. Этот способ имеет, несмотря на свои несомненные достоинства, и ряд недостатков, причем недостатков именно дидактического плана. Во-первых, он обладает малой наглядностью, поскольку мнимой единице трудно приписать конкретный физический смысл – по крайней мере, такой смысл, который легко может быть понят обучающимися. Во-вторых, изучению электротехники традиционно предшествует изучение механики, но механика использует иной математический аппарат, в основу которого положена векторная алгебра. Это выглядит вполне оправданным, поскольку само понятие вектора чрезвычайно наглядно и безо всяких трудностей усваивается студентами. Но это ведет к тому, что при переходе к изучению электрических явлений нарушается один из главных принципов дидактики – принцип последовательности. Поэтому перспективной выглядит попытка создания принципиально нового подхода к математическому моделированию электрических явлений. Его базис – рассмотрение синусоидального напряжения и тока в качестве векторных величин, когда вместо функций *u(t)* и *i(t)* мы используем соответствующие им векторы $\bar{u}$ и $\bar{\imath}$. Это отнюдь не то же самое, что применение векторных диаграмм, поскольку они строятся задним числом – как иллюстрация уже известных из опыта соотношений между электрическими величинами, но не как инструмент, позволяющий заранее предсказать особенности, характерные именно для цепей переменного тока.

Цель нашей статьи – обосновать правомерность и продуктивность упомянутого подхода. Для этого следует в первую очередь вспомнить и при необходимости напомнить студентам следующее: чтобы считать какую-либо физическую величину векторной, предварительно следует убедиться, что соблюдены два условия. Во-первых, значение векторной величины должно определяться не одним числом, в отличие от скаляра, а тремя (в геометрии это – коэффициенты разложения вектора по ортам). В случае переменного тока это условие, очевидно, выполняется, поскольку от другого подобного ему тока он отличается значением амплитуды I, частоты ω и начальной фазы φ (на практике обычно приходится иметь дело лишь с изменением амплитуды и начальной фазы, так как частота остается постоянной). Второе условие заключается в том, что величина, которую мы хотим принять за вектор, должна складываться с аналогичной величиной по правилу параллелограмма. Но два переменных тока, генерируемые разными источниками, именно так себя и ведут (на этом, в частности, основан широко известный графический метод нахождения результирующего тока в электрической цепи [1, с. 45–46]). Разумеется, все рассуждения, приведенные выше, сохраняют свою силу и для переменного напряжения.

Чтобы двигаться дальше в рамках заявленного подхода, нам необходимо рассмотреть относительно новую математическую операцию над векторами, которая по сей день систематически игнорируется в книгах, где излагаются основные вопросы векторной алгебры. Мы имеем в виду деление одного вектора на другой. Само это действие в общем случае, без привязки конкретно к электрическим явлениям, было рассмотрено И.П. Поповым в его статье «Скалярное и векторное деление и дифференцирование векторов» (Курган, 2018 год) [2]. Сначала в этой статье вводится операция деления скаляра a на вектор $\bar{b}$:

$$c = \frac{a}{\bar{b}} = \frac{a}{\bar{b}} \cdot \frac{\bar{b}}{\bar{b}} = \frac{a\bar{b}}{\bar{b} \cdot \bar{b}} = \frac{a}{b^2}\bar{b} \tag{1}$$

В частности,

$$\frac{1}{\bar{b}} = \frac{b}{b^2} \tag{2}$$

Если же числитель в формуле (1) представляет собою не скалярную, а векторную величину, то результат деления может, по аналогии с умножением векторов, быть как скаляром, так и вектором. Для первого случая имеем:

$$p = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \bar{a} \cdot \frac{1}{\bar{b}} = \bar{a} \cdot \frac{\bar{b}}{b^2} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{b^2} = \frac{a \cdot b}{b^2}\cos\varphi = \frac{a}{b}\cos\varphi \tag{3}$$

Для второго случая:

$$q = \bar{a} \div \bar{b} = \bar{a} \times \frac{1}{\bar{b}} = \bar{a} \times \frac{\bar{b}}{b^2} = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{b^2} = \frac{a \cdot b}{b^2}\bar{j}\sin\varphi = \frac{a}{b}\bar{j}\sin\varphi, \tag{4}$$

где $\bar{j}$ – единичный вектор (орт).

То есть деление одного вектора на другой осуществляется совершенно так же, как их умножение, только в формулы вместо произведения входит частное.

Теперь перепишем формулу (3), опустив все промежуточные выкладки, взяв вместо абстрактных величин $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вполне конкретные векторы $\bar{u}$ и $\bar{i}$, а результат скалярного деления обозначив как r:

$$r = \frac{u}{i}\cos\varphi \tag{5}$$

Здесь u и i – модули векторов напряжения и тока соответственно, то есть просто числа (скаляры), которые мы получаем при помощи вольтметра и амперметра. Отношение этих чисел есть не что иное, как полное сопротивление z, а вся формула (5) представляет собою известное выражение, по которому находится активное сопротивление r электрической : мы умножаем полное сопротивление на коэффициент мощности. Таким образом, скалярное деление векторов $\bar{u}$ и $\bar{i}$ приобретает вполне конкретный физический смысл активного сопротивления. Заметим здесь, что считать активное сопротивление скаляром вполне естественно, поскольку оно существует и в цепях постоянного тока и согласно закону Ома определяется как отношение двух скалярных величин.

Сделаем теперь с формулой (4) то же самое, что мы делали прежде с формулой (3), обозначив результат векторного деления как x. Получим:

$$x = \frac{u}{i}\bar{j}\sin\varphi \tag{6}$$

Таким образом, величина x оказывается функцией угла φ между векторами $\bar{u}$ и $\bar{i}$, и если соответствующий угол равен нулю, она обращается в ноль. Но точно таким свойством обладает реактивное сопротивление, поскольку оно возникает лишь тогда, когда наличествует сдвиг фаз – тот самый угол φ. Иными словами, результат векторного деления переменного напряжения на переменный ток есть ни что иное, как реактивное сопротивление цепи – то, что обычно трактуют

как мнимую часть электрического импеданса. При этом множитель $\bar{j}$, будучи вектором, может войти в формулу (6) как с положительным, так и с отрицательным знаком, и первый из этих случаев соответствует индуктивному сопротивлению, а второй – емкостному.

Если мы теперь возведем в квадрат правые части выражений (5) и (6), а затем найдем сумму этих квадратов, то получим:

$$\left(\frac{u}{i}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{u}{i}\bar{j}\sin\varphi\right)^2 = \left(\frac{u}{i}\right)^2 \cdot \left(\cos^2\varphi + \bar{j}^2\sin^2\varphi\right) = \left(\frac{u}{i}\right)^2 \tag{7}$$

Или же (в другой записи):

$$r^2 + x^2 = z^2 \tag{8}$$

То есть мы получили хорошо известное соотношение: полное, активное и реактивное сопротивление в цепи переменного тока соотносятся так же, как гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника.

Что же касается общего плана занятия в вузе, посвященного цепям переменного тока и их особенностям, то его можно представить как последовательность этапов:

1) Преподаватель обосновывает правомерность взгляда на синусоидальное напряжение и ток как на векторные величины;

2) Студенты знакомятся с математической операцией деления вектора на вектор, при этом подчеркивается ее схожесть с уже известным из курса математики умножением векторов;

3) Преподаватель демонстрирует: применив к цепи переменного тока закон Ома и считая напряжение и ток векторами, заранее можно утверждать, что электрическое сопротивление в этом случае распадается на две составляющие. Причем одна из них может быть положительной или отрицательной, а общие потери, аналогичные потерям в цепях постоянного тока, находятся по правилу геометрического суммирования;

4) В конце следует упомянуть и по возможности проиллюстрировать с помощью лабораторного оборудования, что этот заранее сделанный вывод полностью подтверждается экспериментом.

Выводы. Таким образом, взгляд на переменное напряжение и ток как на векторные величины позволяет просто и непротиворечиво описать и объяснить явления, связанные с существованием активной и реактивной нагрузки. Этот новый подход может использоваться при преподавании электротехнических дисциплин или вместо традиционного метода, требующего представления напряжения и тока в комплексной форме, или наряду с ним.

Библиографический список:

1. Нохрин, А.Н. Электротехника и электроника. Курс лекций. Часть I. Электротехника. / А.Н. Нохрин. – Череповец, Череповецкий государственный университет, 2005. – 274 с.

2. Попов, И.П. Скалярное и векторное деление и дифференцирование векторов / И.П. Попов // Прикладная математика и вопросы управления. – Курганский государственный университет. – 2018. – № 2. – С. 43–55.

REPRESENTATION OF SINUSOIDAL ELECTRIC QUANTITIES BY VECTORS AS THE BASIS OF A NEW APPROACH TO THE DESCRIPTION OF PROCESSES IN AC CIRCUITS

G.E. Ananjin
FSBEI HE Yaroslavl SAU, Yaroslavl, Russia

Key words: *vector, division, alternating current, active resistance, reactance.*

This article discusses a new approach to explaining and describing processes in AC electrical circuits that does not require the use of complex numbers. It is argued that within this approach, it is appropriate to consider sinusoidal voltage and current as vector quantities, with active resistance corresponding to their scalar division, and reactive resistance corresponding to their vector division.