УДК 517.9

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПАКЕТЕ MATHCAD

Куликова А.М., магистрант 1 курса инженерного факультета,
Хабаров М.А., студент 1 курса инженерного факультета
Научные руководители – Исаев Ю.М., д.т.н., профессор,
Семашкин Н.М., к.т.н., доцент
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

Ключевые слова: *математика, нелинейные уравнения, построение графиков, решение задач, компьютерные системы.*

В работе представлено решение нелинейных уравнений с применением численных методов. Изложена суть метода Ньютона. Приведены примеры уравнений и подробное описание решений в электронной среде Mathcad.

Многие процессы, описываемые в науке и технике, требуют подготовки специалистов, владеющих как методами проведения математических расчетов, так и использующих новейшие информационные технологии. Рассмотрим численный метод решения нелинейных уравнений.

Нелинейным называется уравнение вида

$f(x) = 0,$

где $f\ (x)$ – алгебраическая или трансцендентная функция переменной x, определенная и непрерывная на некотором интервале $[a, b]$. Всякое число $x \in [a,b]$, при котором функция обращается в нуль, называется корнем уравнения. Задача численного нахождения корней уравнения обычно разбивается на два этапа.

Первый этап состоит в отделении корней, т.е. находят достаточно малые окрестности в рассматриваемой области, в которых содержится одно значение корня. Для отделения корня пользуются теоремой математического анализа, утверждающей, что если значения непрерывной функции на концах отрезка $[a, b]$ имеют разные знаки, т.е. $f(a) f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения. Если внутри интервала [a, b] производная $f'(x)$ знак сохраняет, то этот корень на интервале единственный. Такой интервал называют интервалом изоляции корня.

На втором этапе производится уточнение этих корней с помощью численных итерационных методов для достижения заданной точности нахождения корней уравнения.

Метод Ньютона

Пусть дано нелинейное уравнение f (x) = 0 и пусть на интервале изоляции [a, b] (рис. 1) производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки. В качестве начального приближения x0 выбирается конец интервала изоляции, на котором знаки f (x) и $f''(x)$ совпадают (на рис. 1, например, f (x0) и $f''(x_0)$ положительны, поэтому принимаем $x_0 = a$).

В точке M с координатами $(x_0, f(x_0))$ проводим касательную к графику функции f (x) до пересечения с осью абсцисс. Уравнение касательной имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

В точке пересечения касательной с осью абсцисс имеем $x = x_1$, y = 0, откуда следует, что приближение $x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$.Таким образом, формула метода Ньютона отыскания следующего приближения имеет вид: $x_{i+1} = x_i - f(x_i) / f'(x_i)$, где i = 0, 1, 2,...

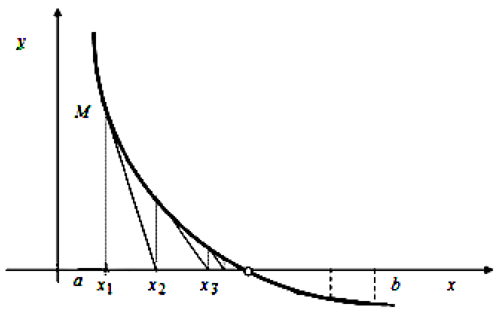

Рис. 1. Геометрическая интерпретация метода касательных

Вычислительный процесс по этой формуле продолжают до тех пор, пока значение $\left|f(x)\right|$ не станет меньше заранее заданного числа ξ, то есть на некотором шаге *n* не будет выполняться условие $f(x_n) < \xi$.

Решение уравнения *f*(*x*) := *x*– sin(*x*) – 0.25 в пакете Mathcad

1. Для этого в основном окне определим границы интервала поиска корня и функцию *f* (*x*). С помощью панели «Исчисление» задаем первую и вторую производные этой функции. Далее, последовательно используя опции «add line», «if», «otherwise» панели программирования, определяем выбор начального приближения (a или b). После набора «x = » и нажатия «Enter» получим начальное значение x = 2.

a := 1 b := 2

f(x) := x– sin(x) – 0.25

$$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \quad f2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

$$x := \left| \begin{array}{ll} a & \text{if} \quad f(a)\cdot f2(a) > 0 \\ b & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

x := 2

2. С помощью встроенной функции root() найдем корень уравнения с точностью 0,001

3. Решим уравнение графически. Определяем диапазон изменения переменной, например, [–1,2]. Шаг изменения возьмем равным 0,1. После ввода переменной и знака присваивания (**Shift + :**) введем начальное значение интервала, запятую и нажмем клавишу **;** (точка с запятой). В появившийся шаблон вводим следующее значение переменной с учетом выбранного шага, затем – конечное значение переменной. Чтобы построить график, можно воспользоваться панелью графиков или установить курсор в месте размещения графика и нажать **Shift + 2.** В метку на оси ординат вводится имя функции *f(x), в* метку на оси абсцисс имя переменной *x*. Можно отредактировать график, нажав на области графика правую клавишу мыши и выбрав опцию «Формат» или «Свойства».

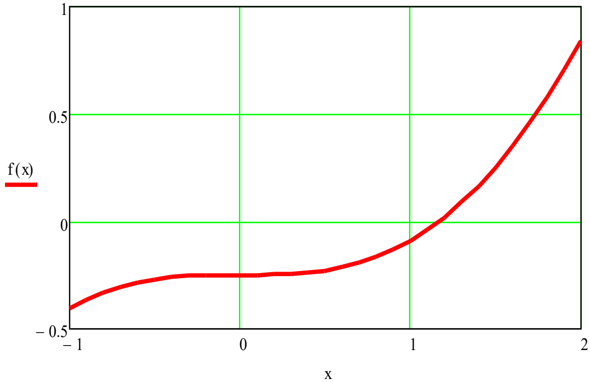

Рис. 2. График функции $f(x) = x - \sin(x) - 0$.

4. Выведем все промежуточные значения корня с проверкой условия прекращения счета на каждой итерации. Для этого в основном окне Mathcad кроме интервала изоляции корня, функции и начального значения введем рекуррентную формулу метода касательных и определим количество итераций от 0 до 5. Соответствующие результаты появляются после ввода $x_{i+1} := \frac{f(x_i)}{f1(x_i)}$ или $\xi_{i+1} := |x_{i+1} - x_i|$ и знака равенства. Ниже приведен результат вышеописанных действий.

$a := 1 \; b := 2$

$f(x) := x - \sin(x) - 0.25$

$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

$i := 1$

$x_{i-1} := 2$

$i := 0..5$

$x_{i+1} := \frac{f(x_i)}{f1(x_i)} \quad \xi_{i+1} := |x_{i+1} - x_i|$

$x_i =$

2
1.406
1.203
1.172
1.171
1.171

$\xi_i =$

0
0.594
0.203
0.031
$7.437 \cdot 10^{-4}$
$4.171 \cdot 10^{-7}$

Решение второго уравнения f(x) := 6 (1– x2) – e x в пакете Mathcad

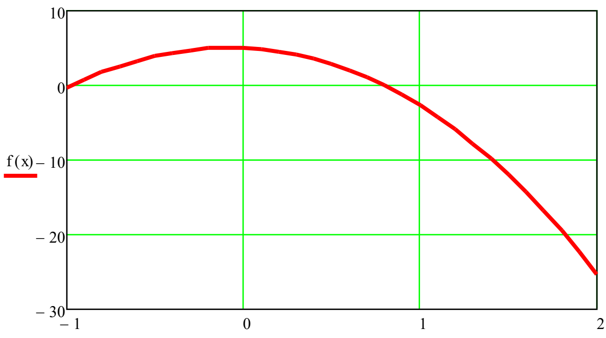

Рис. 3. График функции $f(x) := 6\,(1 - x^2) - e^x$.

a := 0 b := 1

f(x) := 6(1 – x2) – ex

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

i := 1

$$x_{i-1} := 1$$

$$i := 0..\,5$$

$$x_{i+1} := \frac{f(x_i)}{f1(x_i)} \quad \xi_{i+1} := \left| x_{i+1} - x_i \right|$$

$x_i =$

1
0.815
0.795
0.794
0.794
0.794

$\xi_i =$

0
0.185
0.021
$2.576 \cdot 10^{-4}$
$4.015 \cdot 10^{-8}$
0

Данный метод решения и изучения способствует более глубокому усвоению знаний и более точному и безошибочному определению корней уравнения. Будущий специалист с техническим образованием должен знать методы вычислений, а эффективность этих методов зависит от того, какие средства используются при решении.

Библиографический список:

1. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. Изд-во М.: Айрес пресс 2003 – 576 с. –

2. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad. Учебный курс. Изд-во СПб.: Питер 2005 –448 с

3. *Дьяченко С. А.* Использование интегрированной символьной системы Mathematica в процессе обучения высшей математике в вузе: Дис. на соис. учен. степени канд. пед. наук. Орел: Орловский гос. пед. ун-т. 2002.

4. Ospanova Sh., Aduov M., Kapov S., Orlyansky A., Volodya K. The results of experimental research of a rotor seed-metering unit for sowing non-free-flowing seeds // Journal of Agricultural Engineering. 2024. Vol. 55. Is 1. P. 1556.

5. Халиуллин Д.Т., Дмитриев А.В., Хафизов Р.Н., Яровой М.Н. Исследование движения воздушно-зерновой смеси в рабочей зоне семенорушки аэромеханического типа // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. 2019. Т. 12. № 4 (63). С. 27-37.

6. Zhichkina L., Mirgorodskaya M., Zhichkin K., Marenkov A., Ergashev I., Tumanov A., Volgin A. Assessment of degradation transformations of agricultural lands // BIO WEB OF CONFERENCES. XVII International Scientific and Practical Conference “State and Development Prospects of Agribusiness” (INTERAGROMASH 2024). EDP Sciences, 2024. P. 04001.

7. Krivoshapko S.N. Kinematic surfaces with congruent generatrix curves // RUDN Journal of Engineering Research. 2023. Vol. 24. Is 2. P. 166-176.

8. Kolinko A.A., Kambulov S.I., Chervyakov I.V., Rudoi D.V., Olshevskaya A.V. Investigation of the uniformity of seed distribution during sowing of winter wheat // E3S Web of Conferences. XVI International Scientific and Practical Conference “State and Prospects for the Development of Agribusiness - INTERAGROMASH 2023”. Rostov-on-Don, Russia, 2023. P. 01009.

9. Бычков И.Е., Бычкова Т.В. Моделирование параметров шнекового транспортера-распределителя // Агроинженерия. 2022. Т. 24. № 1. С. 40-44.

SOLVING NONLINEAR EQUATIONS IN THE MATHCAD PACKAGE

A.M. Kulikova, M.A. Habarov
Scientific supervisor – Isaev Yu. M., Semashkin N.M.
Ulyanovsk SAU

Keywords: *mathematics, nonlinear equations, graphing, problem solving, computer systems.*

The paper presents the solution of nonlinear equations using numerical methods. The essence of Newton's method is described. Examples of equations and a detailed description of solutions in the Mathcad electronic environment are given.