УДК 004.942

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С УЧЁТОМ СИЛЫ ТРЕНИЯ

Калинин А.С., Студент 4 курса института точных наук и информационных технологий
Научный руководитель – Беляева Н.А., доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО СГУ им. Питирима Сорокина

Ключевые слова: *математический маятник, сила трения, фазовые кривые, Maple, устойчивость*

Работа посвящена исследованию модели математического маятника с учётом силы трения. Построены фазовые кривые в системе Maple и проведён анализ особых точек на фазовой плоскости.

Введение. Математический маятник — одна из классических моделей, используемых для изучения колебательных процессов. С развитием технологий модели маятников находят применение в управлении и стабилизации сложных технических систем, таких как летательные аппараты и роботы. В данной статье рассматривается модель математического маятника с учётом силы трения, что позволяет более точно описать реальные физические процессы [1].

Целью работы является исследование уравнения движения математического маятника с учётом силы трения, построение фазовых кривых в системе Maple и анализ особых точек на фазовой плоскости.

Результаты исследований.

1. Уравнение движения маятника без трения

Для составления уравнения движения математического маятника воспользуемся методом Лагранжа. Кинетическая энергия T и потенциальная энергия U системы выражаются как:

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2, U = mgh = -mgl\,(\cos\theta - 1).$$

Лагранжиан системы $L = T - U$ и уравнение Лагранжа приводят к уравнению движения:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0,$$

где $\omega^2 = \frac{g}{l}$.

Для малых колебаний, когда угол отклонения θ мал, можно использовать приближение $\sin\theta \approx \theta$. В этом случае уравнение движения принимает вид гармонического осциллятора:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0.$$

2. Уравнение движения маятника с трением

В реальных условиях движение маятника сопровождается силами трения. С учётом силы трения $F_{\text{тр}} = -k\dot{\theta}$ уравнение движения принимает вид [1]:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = -k\dot{\theta}.$$

3. Построение фазовых кривых в Maple

В зависимости от коэффициента трения k были рассмотрены различные случаи:

k = 0: центр (устойчивый, но не асимптотически).

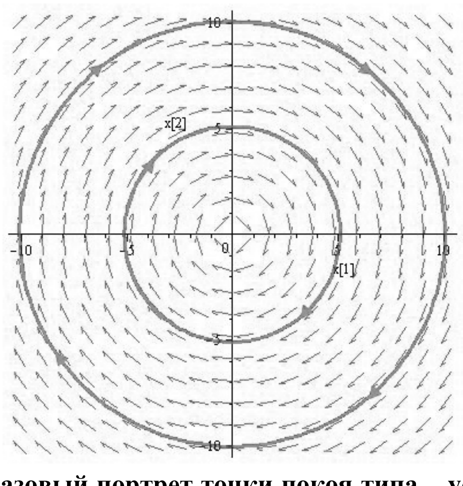

Рис 1. Фазовый портрет точки покоя типа – устойчивый, но не асимптотически центр.

k = 2: устойчивый фокус.

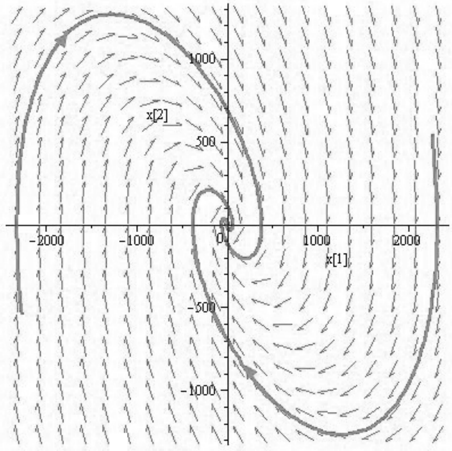

Рис 2. Фазовый портрет точки покоя типа – устойчивый фокус.

$k > 2$: устойчивый узел.

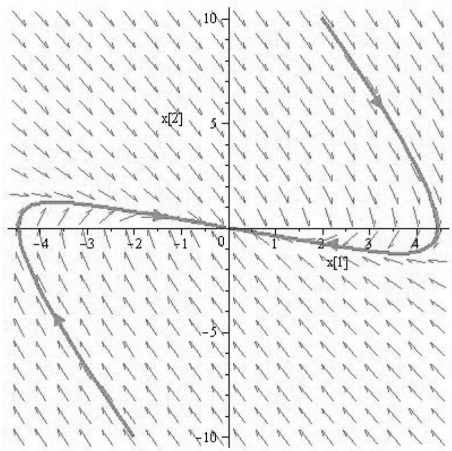

Рис 3. Фазовый портрет точки покоя типа – устойчивый узел.

Выводы. В результате проведенного исследования влияния коэффициента трения на характер движения математического маятника, установлено, что увеличение трения приводит к переходу системы от устойчивых колебаний к апериодическому движению. Данный вывод находит подтверждение в теоретических и прикладных аспектах математического моделирования колебательных систем, рассматриваемых в учебном пособии доктора физико-математических наук Беляевой Н.А. "Математическое моделирование".

Библиографический список:

1. Беляева Н. А. Математическое моделирование: учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета, 2014. 116 с.

2. Савотченко С. Е., Кузьмичева Т. Г. Методы решения математических задач в Maple. – М.: Наука, 2001. 116 с.

INVESTIGATION OF A MATHEMATICAL PENDULUM TAKING INTO ACCOUNT FRICTION FORCE

Kalinin A. S.
Scientific supervisor – Belyaeva N.A.
FSBEI VO SSU named after Pitirim Sorokin

Keywords: *mathematical pendulum, friction force, phase curves, Maple, stability*

The work is devoted to the study of a mathematical pendulum model taking into account the friction force. Phase curves were constructed in the Maple system, and an analysis of singular points on the phase plane was conducted.