УДК 631.22.01

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПРОЦЕСС ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА В ТРАНСПОРТЕРАХ

Ю.М.Исаев, доктор техничеких наук, Н.М. Семашкин, В.А. Злобин,
ФГОУ ВПО «Ульяновская государственная сельскохозяйственная академия»

Постановка задачи. Рассмотрим схему движения зерна (рис. 1) за счет спирально-винтового транспортера в донной части бункера длиной L, в котором находится зерно высотой H. Ось x направлена вдоль движения зерна, а ось r перпендикулярно оси x вдоль радиуса канала спирального винта, как показано на рисунке 1. Для нахождения распределения скоростей вдоль оси x примем, что при $r = r_1$ скорость сыпучего материала за счет транспортирующих органов $\upsilon_x = 0$, а при $r = r_2$, где $h = r_2 - r_1$ – высота движущегося слоя зерна, определяется размерами спирального винта.

Исходя из сложной внутренней сущности насыпного материала, отдельные частицы которого являются телами, а вся масса имеет стремление к течению (и при определенных условиях течет, давая «расход» сыпучего материала), для описания поведения «текущего» сыпучего материала удобно уподобить его некоторой вязкой жидкости со средней объемной плотностью ρ и коэффициентом вязкости (внутреннего трения) η. На основании принятой гидромеханической модели динамику сыпучего тела можно описать уравнениями, аналогичными уравнениям Навье-Стокса для вязкой жидкости в векторной форме принимают вид:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} grad p + \nu \nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \left(\vec{u}\nabla\right)\vec{u}$$

В проекциях на оси цилиндрической системы координат уравнение имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon_r}{\partial t} = F_r - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial r} + \nu \cdot \nabla^2 \upsilon_r \\ \dfrac{\partial \upsilon_\varphi}{\partial t} = F_\varphi - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \cdot \nabla^2 \upsilon_\varphi \\ \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial t} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu \cdot \nabla^2 \upsilon_z \end{cases} \qquad (1)$$

где υ_r, υ_φ, υ_z – проекции произвольной точки сыпучей среды на соответствующие оси координат; F_r,F_φ,F_z – проекция массовых сил; P – среднее нормальное напряжение (давление) в точке, непосредственно не зависящее от скоростей деформаций; $\nu = \eta/\rho$ – кинематический коэффициент вязкости; ∇^2 – дифференциальный оператор:

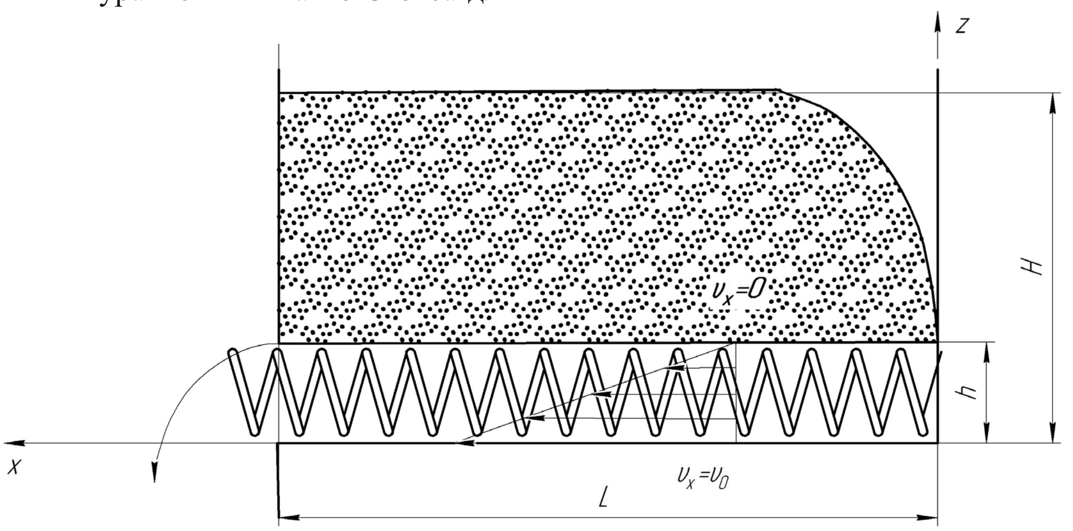

Рис. 1. Схема движения зерна в донной части бункера.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Так как «течение» сыпучего продукта начинается лишь при наличии движения его относительно рабочего органа, т. е. при наличии относительной скорости, то удобно записать уравнение движения относительно подвижных осей координат, связанных с рабочим органом, причем силы инерции переносного движения в этом случае учитывались как массовые, аналогично силам тяжести. Тогда уравнения движения сыпучего тела, отнесенные к подвижной системе отсчета, представляются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d\upsilon_x}{dt} = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \cdot \Delta\upsilon_x - a_x \\ \frac{d\upsilon_y}{dt} = g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \cdot \Delta\upsilon_y - a_y \\ \frac{d\upsilon_z}{dt} = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \cdot \Delta\upsilon_z - a_z \end{cases} \quad (2)$$

где g – ускорение силы тяжести; a – ускорение переносного движения. Скорость υ, конечно, в этом случае будет относительной. Из выражения (2.2) получаем дифференциальные уравнения относительного движения сыпучего продукта по щели, при этом некоторыми величинами, например, g_x и g_y, ввиду их малости пренебрегаем.

Считаем, что ось X направлена вдоль движения, а ось Z, естественно, будет перпендикулярна к ней.

Для наших режимов эти уравнения выражаются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial\upsilon_r}{\partial t} = \nu\left(\frac{d^2\upsilon_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = g \end{cases} \quad (3)$$

Идеализируя рассматриваемый процесс, выделим его особенности:

а) относительное смешение слоев сыпучего продукта в процессе движения в результате наличия сил внутреннего трения (вязкости);

б) относительное движение зернового материала, зависящее от параметров переносного движения винтовой линии пружины.

Первая особенность математически опишется первым уравнением системы (2. 3), если в нем пренебречь силами инерции переносного движения:

$$\frac{\partial\upsilon_r}{\partial t} = \nu\left(\frac{d^2\upsilon_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}\right) \quad (4)$$

Влияние переносного движения (учет второй особенности) можно осуществить заданием такого граничного условия на транспортере, которое бы учитывало факторы переносного движения.

Поэтому в качестве первого граничного условия примем:

при $r = r_2$; $u = u_0$, где u_0 – величина, связанная с кинематическими параметрами спирально-винтового рабочего органа, в общем является известной. В качестве второго граничного условия примем:

при $r = r_1$; $u = 0$.

В качестве начального условия примем:

при $t = 0$; $u = 0$ $(r_1 < r < r_2)$.

Данное уравнение (2.4) является параболического типа. Заменяем искомую функцию

$$\upsilon(r,t) = u(r,t) + w(r). \quad (5)$$

где $w(r)$ удовлетворяющее уравнению

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0 \quad (6)$$

С граничными условиями

$w(r_1) = 0$; $w(r_2) = u$

А функция $u(r,t)$ удовлетворяет уравнению $$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad (7)$$

С однородными граничными условиями

$u(r_1,t) = 0$; $u(r_2,t) = 0$

И начальными условиями, которые находятся из равенства

$$\upsilon(r,0) = u(r,0) + w(r) = 0.$$

Откуда

$u(r,0) = -w(r).$

Решаем вначале уравнение

$$\Delta \upsilon = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr} \right) = 0 \qquad (8)$$

Удовлетворяющее граничным условиям $w(r_1) = 0$; $w(r_2) = u$.

$$r\frac{dw}{dr} = C_1$$

$$w = \tilde{N}_1 \ln r + C_2$$

Используя граничные условия, получаем:

$$0 = \tilde{N}_1 \ln r_1 + C_2$$

$$u_0 = \tilde{N}_1 \ln r_2 + C_2$$

Откуда $\tilde{N}_1 = u_0 / \ln\left(r_2/r_1 \right)$, а

$$C_2 = -C_1 \ln r_1 = -u_0 \ln r_1 / \ln\left(r_2/r_1 \right).$$

Окончательно на участке изменение скорости по радиусу запишется:

$$w = u_0 \ln\left(r/r_1 \right) / \ln\left(r_2/r_1 \right) \qquad (9)$$

Далее решаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right) \qquad (10)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям $u(r_1,t) = 0$; $u(r_2,t) = 0$ и начальному условию

$$u(r,0) = -w(r) = -u_0 \ln\left(r/r_1 \right) / \ln\left(r_2/r_1 \right).$$

Ищем решение уравнения (2.10) в виде произведения $u(r, t) = V(r)\, T(t)$. Тогда уравнение (2.10) преобразуется к виду:

$$\frac{T'}{\nu T} = \frac{V'' + \frac{1}{r}V'}{V} = \lambda = -\omega^2. \qquad (11)$$

Отрицательность этих отношений следует из того, что уравнение $T' = \nu\lambda T$ имеет решение $T(t) = ce^{\nu\lambda t}$, которое не должно стремиться к бесконечности при $t \to \infty$. Правое из этих отношений вместе с граничным условием дает задачу Штурма – Лиувилля

$$V''(r) + \frac{1}{r}V'(r) + \omega^2 V(r) = 0, \qquad V(R) = 0. \qquad (12)$$

Произведем в этом уравнении замену переменной $\eta = \omega r$. Так как то уравнение $V'_r = V'_\eta \omega$, $V''_{rr} = V''_{\eta\eta}\omega^2$, преобразуется к виду

$$\omega^2\left[V''_{\eta\eta}(\eta) + \frac{1}{\eta}V'_\eta(\eta) + V(\eta) \right] = 0. \qquad (13)$$

которое является частным случаем (при) $\alpha = 0$ уравнения Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2} \right)y = 0$$

Следовательно, решением уравнения (2.13) является функция Бесселя порядка нуль, $I_0(\eta)$ потому решением уравнения (2.12) будет функция $I_0(\omega r)$. Из граничного условия $V(R) = 0$ следует, что собственными значениями задачи (2.12) могут быть только те числа , $\omega = \omega_k$ для которых $\omega_k R = \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots$, где μ_k – нули функции Бесселя $I_0(\eta)$ $I_0(\mu_k) = 0$, $k \in$ N). Собственными функциями задачи (2.12) будут функции $I_0\left(\frac{\mu_k}{r_1}r \right)$. Учитывая, что

решением уравнения $T' = \nu\lambda t$ при

$$\lambda = -\omega_k^2 = -\left(\frac{\mu_k}{r_1} \right)^2$$ будут функции

$T_k(t) = A_k e^{-\frac{\nu\mu_k^2}{R^2}}$, заключаем, что решениями (2.10), удовлетворяющими граничным условиям, будут функции

$$u_k(r,t) = A_k e^{-\nu\left(\frac{\mu_k}{r_1} \right)^2 t} I_0\left(\frac{\mu_k}{r_1}r \right).$$

Выбираем числа A_k, $k \in$ N, так, чтобы

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\nu\left(\frac{\mu_k}{r_1} \right)^2 t} I_0\left(\frac{\mu_k}{r_1}r \right)$$

ряд

Это решение должно удовлетворять начальному условию:

$$u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_0\left(\frac{\mu_k}{r_1}r \right) = -u_0 \ln\left(r/r_1 \right) / \ln\left(r_2/r_1 \right)$$

Обозначая $x = \frac{r}{r_1}$, видим, что числа A_k должны быть коэффициентами Фурье – Бесселя функции $-u_0 \ln\left(r/r_1 \right)/\ln\left(r_2/r_1 \right) = \frac{-u_0}{\ln\left(r_2/r_1 \right)}\ln x$.

Обозначим $\left(r_2/r_1 \right) = \alpha$, $y = \mu_k x$, тогда:

$$A_k = \frac{2u_0}{\ln\left(r_2/r_1\right)\left[I_0^{'}(\mu_k)\right]^2}\int_1^{\alpha} \ln x\, I_0(\ldots$$

$$k \in N$$

Используя соотношения

$$xI_0(x) = \frac{d}{dx}\left[xI_1(x)\right] \quad \text{и} \quad I_1(x) = -\frac{d}{dx}\left[I_0(x)\right],$$

имеем:

$$\int_1^{\alpha} \ln x\, I_0(\mu_k x)x dx = \frac{1}{\mu^2}\int_{\mu_k}^{c\mu_k}\left(\ln y - \ln \mu_k\right) y I_0(y)dy =$$

$$\frac{1}{\mu^2}\int_{\mu_k}^{\alpha\mu_k}\left(\ln y - \ln \mu_k\right)\frac{d}{dy}\left[yI_1(y)\right]dy =$$

$$\frac{1}{\mu_k^2}\left(\int_1^{c\mu_k} \ln y\, d\left[yI_1(y)\right] - \int_{\mu_k}^{\alpha\mu_k} \ln\mu_k\, d\left[yI_1(y)\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_k^2}\left(y\ln y I_1(y)\Big|_{y=\mu_k}^{y=c\mu_k} - \int_{\mu_k}^{c\mu_k} I_1(y)dy \right.$$

$$\left. - \frac{\ln\left(\mu_k\right)}{\mu_k^2} y I_1\left(y\right)\Big|_{y=\mu_k}^{y=c\mu_k} \right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_k^2}\left(\alpha\mu_k \ln\left(\alpha\mu_k\right) I_1(\alpha\mu_k) - \mu_k \ln \mu_k I_1(\mu_k) - \right.$$

$$\left. \int_{\mu}^{\alpha\mu} dI_0(y) \right) - \frac{\ln\left(\mu_k\right)}{\mu_k}\left(\alpha I_1\left(\alpha\mu_k\right) - I_1\left(\mu_k\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_k^2}\left(\alpha\mu_k \ln\left(\alpha\right) I_1(\alpha\mu_k) - I_0(\alpha\mu_k)\right)$$

Таким образом,

$$A_k = \frac{-2u_0\left(\alpha\mu_k \ln\left(\alpha\right) I_1(\alpha\mu_k) - I_0(\alpha\mu_k)\right)}{\mu_k^2 \ln\left(\alpha\right) I_1^2(\mu_k)}$$

Следовательно, искомое решение примет вид:

$$u(r,t) = \frac{u_0}{\ln\alpha}\left(\ln\left(r/r_1\right) - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(c\mu_k \ln\left(\alpha\right) I_1(c\mu_k) - I_0(c\mu_k)\right)}{\mu \quad (\mu\ )} e^{-\nu\left(\frac{\mu_k}{r_1}\right)^2 t} I_0\left(\frac{\mu_k}{r_1} r\right)\right)$$

$$\upsilon_x(r,t) = w = u_0 \ln\left(r/r_1\right)/\ln\left(r_2/r_1\right)$$

Исходя из этого решения следует, что при значениях времени t в пределах нескольких секунд , режим перемещения сыпучего материала становится установившимся, и скорость вдоль оси будет иметь вид (9):

$$\upsilon_x(r,t) = w = u_0 \ln\left(r/r_1\right)/\ln\left(r_2/r_1\right)$$

Предварительными исследованиями установлено, что зерно выгружается спирально-винтовым рабочим органом из того участка бункера, который наиболее удален от выгрузного окна. Причину этого явления следует объяснить тем, что перемещается материал винтовой поверхностью пружины более активно, чем материал, находящийся над данным слоем, не имея при этом свободного пространства для истечения.

Данное решение позволяет объяснить опытный факт, что из щелевого бункера вначале выгружается насыпной материал, расположенный в задней части бункера, а материал, расположенный в передней части, захватывается в последнюю очередь.