ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЖИЗНИ ЧЕЛОВЕКА

Ермолаева М., ученица 10 «А» класс Октябрьского сельского лицея
Научный руководитель - Пухова Надежда Алексеевна, учитель математики

Данная работа представляет собой мои научные исследования в области фрактальной геометрии. Почему геометрию так часто называют «холодной» и «сухой»? Одна из причин - ее неспособность описать форму облака, горы, дерева или береговой линии. Облака не являются сферами, горы - конусами, береговые линии нельзя изобразить с помощью окружностей, кору деревьев не назовешь гладкой, а путь молнии - прямолинейным.

В общем виде многие формы природы настолько неправильны и фрагментированы, что в сравнении с евклидовыми фигурами природа демонстрирует не просто более высокую степень, но совершенно иной уровень сложности. Количество различных масштабов длины в естественных формах можно считать бесконечным для каких угодно практических задач.

Мы считаем, что новая геометрия способна описать многие из неправильных и фрагментированных форм в окружающем нас мире и породить вполне законченные теории, определив семейство фигур, которые называются фракталами. Наиболее полезные фракталы включают в себя элемент случайности; как правильность, так и неправильность их подчиняется статистическим законам. Кроме того, многие фигуры стремятся к масштабной инвариантности, т. е. степень их неправильности и фрагментации неизменна во всех масштабах.

Одни фрактальные множества представляют собой кривые или поверхности, другие - несвязную «пыль»; есть и такие, чья форма столь причудлива, что ни наука, ни искусство не в состоянии предложить подходящее для них название.

Фрактальные множества часто возникают в качестве аттракторов или бассейнов притяжений динамических систем даже в самых, казалось бы, простейших ситуациях (см. Множество Жюлиа). В компьютерной графике это используется при создании изображений сложных, похожих на природные, объектов: например, облаков, снега, мусорных куч, береговых линий и др.

Фракталы можно объединить в три группы: геометрические, алгебраические и стохастические. Однако существуют и другие классификации: рукотворные (придуманы учёными) и природные. На природные фракталы накладывается ограничение на область существования - то есть максимальный и минимальный размер, при которых у объекта наблюдаются фрактальные свойства. Детерминированные (алгебраические и геометрические) и недетерминированные (стохастические).

История фракталов началась с геометрических фракталов, которые исследовались математиками в XIX веке. Фракталы этого класса - самые наглядные, потому что в них сразу видна самоподобность.

В двухмерном случае такие фракталы можно получить, задав некоторую ломаную, называемую генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную - генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается фрактальная кривая. При видимой сложности полученной кривой, её общий вид задаётся только формой генератора. К ним относятся кривые *дракона,* Коха, Леви, Минковского, Пеано, множество Кантора, треугольник Серпинского, дерево Пифагора и др.

Для построения алгебраических фракталов используются итерации нелинейных отображений, задаваемых простыми алгебраическими формулами.

Наиболее изучен двухмерный случай. Нелинейные динамические системы могут обладать несколькими устойчивыми состояниями. Каждое устойчивое состояние (аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, при которых система обязательно в него перейдёт. Таким образом, фазовое пространство разбивается на области притяжения аттракторов.

Если фазовым является двухмерное пространство, то, окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно получить сложные фрактальные картины с причудливыми многоцветными узорами. Неожиданностью для математиков стала возможность с помощью примитивных алгоритмов порождать очень сложные нетривиальные структуры.

Алгоритм построения достаточно прост и основан на итеративном выражении: $z_i + 1 = F(z_i)$ где $F(z_i)$ - какая-либо функция комплексной переменной.

Для всех точек прямоугольной или квадратной области на комплексной плоскости вычисляем достаточно большое количество раз $z_i + 1 = F(z_i)$, каждый раз находя абсолютное значение *z*. При этом значения функции для разных точек комплексной плоскости могут иметь разное поведение: с течением времени $|z| \to \infty$, $|z| \to 0$; | z | принимает несколько фиксированных значений и не выходит за их пределы; поведение | z | хаотично, без каких-либо тенденций.

Одним из самых распространённых способов раскрашивания точек будет сравнение | z | с заранее выбранным числом, которое считается «бесконечным», т. е. цвет точки равен номеру итерации, на которой | z | достиг «бесконечности», или чёрному в противном случае.

Также можно изменить вид фрактала, если контроль значения z вести другим образом, например: действительная часть z меньше определённого числа; мнимая часть z меньше определённого числа; мнимая и действительная части z меньше какого-либо числа; другие способы. И, наконец, ещё один интересный эффект - изменение палитры. После того, как изображение построено, можно циклически изменять цвета закрашенных областей, и тогда и без того удивительное изображение «оживёт» на экране.

Благодаря фрактальной геометрии мы узнаём о том, что некоторые из наиболее сухих и холодных разделов математики скрывают за внешней суровостью целый мир чистой пластичной красоты, доселе неведомой.

Геометрические фракталы применяются для получения изображений деревьев, кустов, береговых линий и т. д. Алгебраические и стохастические - при построении ландшафтов, поверхности морей, карт раскраски, моделей биологических объектов и др. К стохастическим фракталам можно отнести плазму, рандомизированный (стохастический) фрактал. Для построения плазмы необходимо использовать шаблон черно-белого изображения. Рандомизованный фрактал строится по обычному алгоритму, за исключением того, что при вычислении на каждой итерации добавляются случайные величины. С помощью фракталов хорошо описываются процессы, относящиеся к механике жидкостей и газов: динамика и турбулентность сложных потоков; моделирование пламени; изучение пористых материалов, в том числе в нефтехимии. В биологии фракталы применяются: в моделировании популяций; в биосенсорных взаимодействия; рассмотрении процессов внутри организма, например, биение сердца.

Среди литературных произведений находятся такие, которые обладают текстуальной, структурной или семантической фрактальной природой. В текстуальных фракталах потенциально бесконечно повторяются элементы текста неразветвляющееся бесконечное дерево, тождественные самим себе с любой итерации («У попа была собака…», «Притча о философе, которому снится, что он бабочка, которой снится, что она философ, которому снится…», «Ложно утверждение, что истинно утверждение, что ложно утверждение…») неразветвляющиеся бесконечные тексты с вариациями («У Пегги был веселый гусь…») и тексты с наращениями («Дом, который построил Джек»).

Фрактальная геометрия используется при проектировании антенных устройств. Натан вырезал из алюминиевой фольги фигуру в форме кривой Коха и наклеил её на лист бумаги, а затем присоединил к приёмнику. Оказалось, что такая антенна работает не хуже обычной. И хотя физические принципы работы такой антенны не изучены до сих пор, это не помешало Коэну основать собственную компанию и наладить их серийный выпуск.

Существуют алгоритмы для сжатия изображения с помощью фракталов. Идея заключается в следующем: предположим что исходное изображение является неподвижной точкой некоего сжимающего отображения. Тогда можно вместо самого изображения запомнить каким-либо образом это отображение, а для восстановления достаточно многократно применить это отображение к любому стартовому изображению. Таким образом, принцип фрактального сжатия информации гарантирует полностью децентрализованную, следовательно, максимально устойчивую работу всей сети.

Как мы с вами сумели убедиться, что фрактальная геометрия не является прямым «приложением» идей, доминирующих в математике XX в. Это - новая отрасль, несколько запоздало родившаяся из кризиса математики.