УДК 51-7

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ

Прошкина А.Е., студентка 3 курса факультета физико-математического и технологического образования
ФГБОУ ВО УлГПУ им. И Н. Ульянова
Научные руководители - Прошкин Е.Н., к.т.н., доцент
Хабарова В.В., к.т.н., доцент
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

Ключевые слова: *ряды, математические методы, степенной ряд, функциональный ряд.*

Значение математики сейчас непрерывно возрастает. В математике рождаются новые идеи и методы, все это расширяет сферу ее приложения. Математика является одной из тех наук, которые широко используются на практике.

Любой производственно-технологический процесс не обходится без фундаментальных математических закономерностей. Инженерное дело также широко использует математические методы, в особенности основы математического анализа. Именно потому, что элементы математики встречаются на производстве практически на каждом шагу, в деятельности инженера существенное значение имеют упрощенные методы расчета.

Специфика профессиональной подготовки специалистов инженерного профиля состоит не только в получении новых математических знаний, но и в воспитании потребности и готовности к применению математических методов в профессиональной деятельности. Следует грамотно формулировать инженерную задачу, наглядно моделировать, интерпретировать результат ее решения на языке реальной ситуации, проверять соответствие полученных и опытных данных. Это возможно при условии актуализации связей между математическими объектами и методами различных разделов математики путем решения профессионально ориентированных задач.

Далее обратимся к теории. Выражение вида [1-4]

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется числовым рядом, где $u_1, u_2, u_3 \dots, u_n$- это члены числового ряда.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,$ $S_1 = u_1;\ S_2 = u_1 + u_2;\ S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ - называют частичными суммами ряда.

Рассмотрим последовательность $\{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$. Если то говорят, что ряд сходится, S называется суммой ряда. Если предел не существует или бесконечен, то говорят, что ряд расходится.

Выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

называется функциональным рядом, где $u_n(x)$ - функции от переменной x.

Частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды. Степенным рядом называется ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$-коэффициенты данного степенного ряда, x- действительная переменная.

Отрезками степенного ряда являются многочлены, что делает степенные ряды удобным средством для приближенных вычислений.

Большую важность приобретает вопрос о возможности наперед заданную функцию разложить по степеням $(x - x_0)$, то есть представить ее в виде суммы ряда. Путь к решению поставленного нами вопроса открывает формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Такой ряд, независимо от того, сходится ли он и имеет ли, на самом деле, своей суммой $f(x)$- называется рядом Тейлора для функции $f(x)$.

Если в ряде Тейлора x_0= 0, то получается ряд Маклорена для функции $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Пусть необходимо найти значение функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью $\alpha > 0$. Если функцию $f(x)$ можно разложить в степенной ряд на промежутке $(-R, R)$ и $x_1 \in (-R, R)$, то точное значение функции $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$, то есть

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2{x_1}^2 + \cdots + a_n{x_1}^n + \cdots,$$

а приближенное значение функции равно частичной сумме $S_n(x_1)$, то есть [1-4]

$$f(x_1) \approx S_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2{x_1}^2 + \cdots + a_n{x_1}^n,$$

точность данного равенства возрастает с увеличением n.

Для наглядности рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,0001.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots, x \in (-1{,}1)$$

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = \sqrt[4]{16(1+\frac{1}{16})} = 2\sqrt[4]{1+\frac{1}{16}}$$

$$(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2}(\frac{1}{16})^2+\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!}(\frac{1}{16})^3$$

$$2(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}} = 2+\frac{1}{31}+\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{16})^2+\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3}(\frac{1}{16})^3$$

Мы получили ряд Лейбница:

$u_1 = 2$, $u_2 = 0{,}03125, u_3 = -0{,}00073, u_4 = 0{,}0000229$

$|u_4| < \alpha$, значит u_4- это первый отброшенный член.

$\sqrt[4]{17} \approx 2 + 0{,}03125 - 0{,}00073 = 2{,}0305$

$АП = 0{,}0000229 + \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}\cdot 2 = 0{,}0000329 < \alpha$ -абсолютная погрешность.

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - x + \frac{x^3}{6}}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{5!}}{\frac{x^3}{3!}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^5\cdot 3!}{x^3\cdot 5!} = 0$$

Значения многих определенных интегралов нельзя найти с помощью каких-либо аналитических методов. В этом случае метод нахождения числового значения определенного интеграла - выражение функции в виде ряда Маклорена с последующим поочередным интегрированием каждого члена. Приближенные методы вычисления определённого интеграла широко применяются при решении многих инженерных задач.

Пример 3. Вычисление определенного интеграла $\int_0^{0,3} e^{-2x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$e^x = 1 - \frac{2x^2}{1!} + \frac{(-2x^2)^2}{2!} - \cdots + \frac{(-2x^2)^n}{n!} + \cdots =$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{2!} - \cdots + \frac{(-2x^2)^n}{n!} + \cdots$$

$$\int_0^{0,3} e^{-2x^2}\,dx = \int_0^{0,3} (1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{2!} - \cdots)dx = 0,3 - \frac{2(0,3)^3}{3} + \frac{4(0,3)^5}{10} - \cdots$$

$u_1 = 0,3;\ u_2 = -0,018;\ u_3 \approx 0,000972; |u_3| < 0,001$ –первый отброшенный член.

$$\int_0^{0,3} e^{-2x^2}\,dx = 0,3 - 0,018 \approx 0,282$$

$\text{АП} = 0,000972 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-4} < 0,001$ - абсолютная погрешность.

Библиографический список:

1. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – 4 издание, перераб. и доп. – М.: «Наука», 1979. – 408 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, том 2.-М.: «Дрофа», 2004. — 720 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, том 2. - 5 издание, М.: «Наука», 1968.- 464 с.
4. Научно – исследовательская деятельность студентов. / Е.Н. Прошкин, Н.С. Киреева, В.В. Курушин, А.Е. Прошкина // Материалы Национальной научно – методической конференции профессорско–преподавательского состава «Инновационные технологии в высшем образовании» .-Ульяновск, 2018. С. 224-227.

APPLICATION OF SERIES IN ENGINEERING PRACTICE

Proshkina A.E.

Key words: *series, mathematical methods, power series, functional series.*

The importance of mathematics is now continuously increasing. In mathematics, new ideas and methods are born, all this expands the scope of its application. Mathematics is one of those Sciences that are widely used in practice.