

УДК 517.518.12

ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

*Евграфова В.Л., студентка 4 курса инженерного факультета
Научный руководитель – Хабарова В.В., к.т.н., доцент
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ*

Ключевые слова: *Тройной интеграл, геометрическое приложение, физические приложения, масса, статические моменты тела, моменты инерции тела.*

В данной статье представлены понятие тройного интеграла и его вычисление, так же показаны приложения тройного интеграла: нахождение объёма, статических моментов, массы тела.

В 1675 году было введено обозначение интеграла, а уже в 1696 году ученые начали заниматься интегральными исчислениями. С 1770 годов особое значение приобретают двойные и тройные интегралы

Для того чтобы дать понятие тройному интегралу рассмотрим тело, занимающее пространственную область Ω (рис. 1), и предположим, что плотность распределения массы в этом теле является непрерывной функцией координат точек тела:

$$\delta = \delta(x, y, z).$$

Единица измерения плотности – $\text{кг}/\text{м}^3$.

Разобъем тело произвольным образом на n частей; объемы этих частей обозначим $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. Выберем затем в каждой части по

произвольной точке $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Получаем приближенное выражение для массы всего тела в виде суммы

$$M_n = \sum_{i=1}^n \delta(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i.$$

Предел этой суммы при условии, что $n \rightarrow \infty$ и каждое частичное тело стягивается в точку (т. е. что его диаметр) стремится к нулю, и даст массу M тела:

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \delta(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i = \iiint_{\Omega} \delta(x, y, z) dv.$$

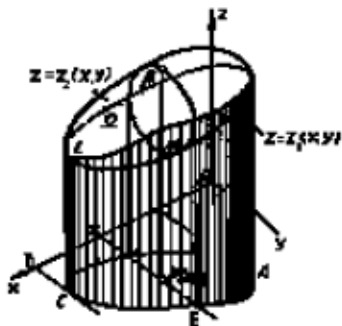


Рисунок 1 - Тело, занимающее пространственную область Ω

Терминология для тройных интегралов совпадает с соответствующей терминологией для двойных интегралов. Если

подынтегральная функция $f(x, y, z)$ тождественно равна 1, то тройной интеграл выражает объем V области:

$$\iiint dv = V.$$

Геометрическое приложение - это **вычисление объема** любого пространственного тела.

Объем тела V в декартовых координатах $Oxyz$ выражается формулой

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

В цилиндрических координатах объем тела равен

$$V = \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz.$$

Физические приложения тройного интеграла включают в себя:

1. Масса и статические моменты тела. Пусть тело занимает объем V и его объемная плотность в точке $M(x, y, z)$ задана функцией $\rho(x, y, z)$. Тогда масса тела m вычисляется с помощью тройного интеграла:

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей Oxy , Oxz , Oyz выражаются формулами:

$$M_{xy} = \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$M_{yz} = \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$M_{xz} = \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz$$

2. Моменты инерции тела. Определяются выражениями относительно координатных плоскостей Oxy , Oxz , Oyz

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_{xz} = \iiint_V y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_{zy} = \iiint_V x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Пример решения тройного интеграла. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями (рис. 2): $x + y = 6$, $y = 3x$, $z = 4y$, $z = 0$.

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^3 dy \int_{\frac{1}{3}y}^{6-y} dx \int_0^{4y} dz = \int_0^3 dy \int_{\frac{1}{3}y}^{6-y} 4y dx = \int_0^3 \left(24y - 4y^2 - \frac{4}{3}y^3 \right) \Big|_0^3 dy = 45$$

В данной статье мы рассмотрели понятие тройного интеграла и его вычисление, представлены некоторые приложения для тройного интеграла: нахождение объема, статических моментов, массы тела. Показан пример решения задач на нахождение тройного интеграла.

Библиографический список:

1. Ермолаева, В.И. Математика: учебное пособие / В.И. Ермолаева, О.Г. Евстигнеева. - Ульяновск: УГСХА, 2013. - 160 с.
2. Патент РФ No 2324329. Измельчитель корнеклубнеплодов / В.И.Курдюмов, Е.И.Зотов, В.В. Хабарова. -№ 2005137434; заявл. 01.12.2005; опубл. 20.05.2008, Бюл. No 14.
3. Хабарова, В.В. Резание движущегося корнеплода вибрирующими ножами / В.В. Хабарова, Ю.М. Исаев, Т.А. Джабраилов // Молодежь и наука XXI века. Материалы III-ой Международной научно-практической конференции. - Ульяновск: Ульяновская ГСХА, 2010.- Том 4. - С. 135-137.
4. Особенности измельчения корнеплодов консольными ножами/ В.В. Хабарова, Р.М. Гайсин, Ю.М. Исаев, В.А. Богатов// Интеграция аграрной науки и производства: состояние, проблемы и пути решения. Материалы всерос-

сийской научно-практической конференции с международным участием в рамках XVIII Международной специализированной выставки «АгроКомплекс-2008». – Уфа: Башкирский ГАУ, 2008.- С. 116-118.

5. Хабарова, В. В. Определение оптимальной частоты вибрации ножей при измельчении корнеплодов/В.В. Хабарова// «Аграрная наука и образование на современном этапе развития: опыт, проблемы и пути их решения. Материалы IV Международной научно-практической конференции. 22-24 ноября . – Ульяновск: Ульяновская государственная сельскохозяйственная академия, 2012.

APPLICATIONS OF THE THREE INTEGRAL

Evgrafova V.L.

Key words: *Triple integral, geometric application, physical applications, mass, static moments of the body, moments of inertia of the body.*

In this paper we present the notion of the triple integral and its calculation, as well as the applications of the triple integral: the determination of volume, static moments, and mass of the body.