УДК 519.615.5

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ

Игонин Н.В., студент 2 курса инженерного факультета
Научный руководитель – Хабарова В. В., кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО Ульяновская ГСХА

***Ключевые слова**: уравнение, итерационный, метод, итерационный метод, решение уравнения*

Основная цель статьи - познакомить читателя с итерационным методом отыскания корней функционального уравнения $x = F(x)$, и особенно со случаем, когда оператор, задаваемый функцией $F(x)$, является оператором сжатия. На базе рассмотрения этого метода излагается метод касательных, являющийся одним из наиболее распространенных методов решения функционального уравнения $f(x) = 0$.

Докажем несколько вспомогательных утверждений, имеющих в курсе математического анализа большой самостоятельный интерес.

Будем говорить, что определенная в некоторой окрестности точки $x = x_0$ функция $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) в точке x_0, если существует такая достаточно малая окрестность точки x_0, в пределах которой $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$, $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ (соответственно $f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$, $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$).

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$ (соответственно $f'(x_0) < 0$), то функция $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) в точке x_0.

Для доказательства этой теоремы ради определенности рассмотрим случай $f'(x_0) > 0$ (случай $f'(x_0) < 0$ рассматривается совершенно аналогично). Так как производная $f'(x_0)$, по определению, равна пределу при $x \to x_0$ разностного отношения то в малой окрестности точки x_0 разностное отношение (1) как угодно мало отличается от $f'(x_0)$, и так как $f'(x_0) > 0$, то в достаточно малой окрестности точки x_0 разностное отношение положительно. Это означает, что в указанной достаточно малой окрестности этой точки $f(x) - f(x_0) > 0$ при $x - x_0 > 0$ и $f(x) - f(x_0) < 0$ при $x - x_0 < 0$ или, что то же самое, $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$.

Метод касательных является одним из самых эффективных приближенных методов вычисления корней уравнения $f(x) = 0$.

Пусть искомый корень c уравнения $f(x) = 0$ расположен на сегменте [a, b]. Перейдем к описанию метода касательных, не выясняя пока условий, при которых этот метод применим. Обратимся к рассмотрению графика функции $f(x)$ на сегменте [a, b]. Примем за нулевое приближение искомого корня некоторое значение x_0 из сегмента [a, b] и обозначим через B_0 точку графика функции с абсциссой x_0. Проведем через точку B_0 касательную к графику функции и возьмем в качестве первого приближения искомого корня абсциссу x_1 точки пересечения этой касательной с осью Ox. Далее проведем касательную к графику функции через точку B_1 с абсциссой x_1 и возьмем за второе приближение абсциссу x_2 точки пересечения этой касательной с осью Ox. Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n$, приближенных значений этого корня.

В практических целях полезно получить рекуррентную формулу, выражающую x_{n+1} через x_n. Для этого возьмем уравнение $Y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ касательной к графику функции в точке B_n и вычислим абсциссу x_{n+1} точки пересечения этой касательной с осью Ox. Формула определяет алгоритм метода касательных.

Заметим, что последовательность $\{x_n\}$, определяемая соотношением, совпадает с итерационной последовательностью, определяемой соотношением $x_{n+1} = F(x_n)$ для функции $F(x)$.

В основе данных методов лежит метод пристрелки (метод вилки). Который состоит в следующем: один снаряд посылают с недолётом, второй с перелётом и при этом говорят, что цель взята в «вилку». Следующий снаряд посылается со средним значением прицела между двумя предыдущими. И смотрят, как он упадёт. В результате «вилка» сужается. Такая корректировка прицела продолжается до тех пор, пока снаряды не накроют цель.

Библиографический список

1. Ильин, В.А. Основы математического анализа. Том 1/ В.А.Ильин, Э.Г.Позняк.- М.: Наука, 1998.- 616 с.
2. Математический анализ I: (Начальный курс) / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. -М.: Изд-воМГУ, 1985. -660с.

3. Ананьев, В.С. Аналитическое определение усилия резания корнеплодов блоком горизонтальных ножей / В.С. Ананьев, В.А. Богатов, В.В. Хабарова // Естественные и технические науки. – 2011. - № 5. – С. 395-399
4. Хабарова, Виктория Валерьевна. Определение оптимальной частоты вибрации ножей при измельчении корнеплодов/В.В. Хабарова// Аграрная наука и образование на современном этапе развития: опыт, проблемы и пути их решения 22-24 ноября Ульяновская государственная сельскохозяйственная академия. Материалы IV Международной научно-практической конференции. – Ульяновск, 2012.
5. Хабарова, В.В. Анализ факторов, определяющих энергозатраты с вибрациями при измельчении корнеплодов и бахчевых/ В.В. Хабарова, В.А. Богатов, Е.И. Зотов // Вестник Ульяновской государственной сельскохозяйственной академии. - 2006 .- № 1 (2). - С. 67-70.

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING EQUATIONS

Igonin N.V.

Keywords: *equation, iterative method, iterative method for the solution of the equation*

The main purpose of this article is to familiarize the reader with the iterative method of finding the roots of the functional equation x = F(x).